85 exercices « type-bac » **2021**

Voie Générale - Mathématiques

Épreuve finale de terminale

Énoncés et corrigés

Félicitations !
Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

- ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour **l'épreuve finale de spécialité** de terminale (comptant pour le baccalauréat, **coef 16**). L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
- ces exercices sont classés par thèmes avec parfois des thèmes croisés pour optimiser vos révisions. Il n'est pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
- les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;
- n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://question-type-bac.fr/

Table des matières

THÈME 1

Raisonnement par récurrence

Exercice 1 - Démontrer une conjecture

[⋆]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

SOLUTION

1. Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer [1] que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2^n - 1$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

  $$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n, ce qui démontre la conjecture.

. . . .

1. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses. . .). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété resultant d'un certain nombre d'observations.

Exercice 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme [★★]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée $(\star)$, valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

SOLUTION

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln\left(A^2\right) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2\ln(A)$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln\left(A^0\right) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant $(\star)$:

$$\ln\left(A^{n+1}\right) = \ln\left(A^n \times A\right) = \ln\left(A^n\right) + \ln(A) = n\ln(A) + \ln(A) = (n+1)\ln(A)$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

3. Dans cette question, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente car n était un entier. Cependant, à l'aide de la propriété $(\star)$, on peut écrire :

$$\ln(A) = \ln\left(\sqrt{A} \times \sqrt{A}\right) = \ln\left(\sqrt{A}\right) + \ln\left(\sqrt{A}\right) = 2\ln\left(\sqrt{A}\right)$$

D'où, *via* une division par 2 :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

....