

85 exercices « type-bac » 2021

Voie Générale - Mathématiques

Épreuve finale de terminale

Énoncés et corrigés

Félicitations !

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

- ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour **l'épreuve finale de spécialité** de terminale (comptant pour le baccalauréat, **coef 16**). L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
- ces exercices sont classés par thèmes avec parfois des thèmes croisés pour optimiser vos révisions. Il n'est pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
- les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;
- n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.



Ce document est **privé** et **non libre de droit**. Sa diffusion ailleurs que sur le site question-type-bac.fr est interdite.

<http://question-type-bac.fr/>

Table des matières

1	Raisonnement par récurrence	4
2	Combinatoire et Dénombrement	9
2.1	Différents outils pour dénombrer	9
2.2	Propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$	16
3	Suites	20
3.1	Suites géométriques	20
3.2	Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)	28
3.3	Utiliser une suite auxiliaire	35
4	Limites et asymptotes	38
4.1	Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	38
4.2	Formes indéterminées	39
4.3	Utilisation d'un théorème de comparaison	42
5	Continuité et dérivabilité	45
5.1	Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection)	45
5.2	Étudier la dérivabilité d'une fonction	49
5.3	Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction	50
5.4	Problèmes nécessitant deux dérivations successives	51
5.5	Équation de la tangente	53
5.6	Lectures graphiques	58
5.7	Convexité	63
6	Fonctions exponentielles et logarithmes	66
6.1	Résoudre une (in)équation	66
6.2	Étude de fonctions	69
6.3	Avec des suites	74
7	Géométrie dans l'espace	76
7.1	Equations cartésiennes des plans de l'espace	76
7.2	Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques	78
7.3	Combinaisons linéaires de vecteurs dans l'espace	83
7.4	Sphères dans l'espace	86
7.5	Projections orthogonales	88
7.6	Problèmes divers et problèmes d'incidence	90

8 Primitives et équations différentielles	99
8.1 Primitives d'une fonction continue	99
8.2 Équations différentielles	102
9 Lois de probabilités	110
9.1 Rappel sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance	110
9.1.1 Probabilités conditionnelles	110
9.1.2 Indépendance	111
9.2 Lois discrètes quelconques	114
9.3 Lois binomiales	115
9.4 Somme de variables aléatoires	120

question-type-bac.fr

Raisonnement par récurrence

Exercice 1 - Démontrer une conjecture

[*]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

<http://question-type-bac.fr>

SOLUTION

1. Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer ⁽¹⁾ que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2^n - 1$$

2. Considérons la propriété \mathcal{P} définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geq 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n + 1)$. La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geq 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n , ce qui démontre la conjecture.

.....

1. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.

Exercice 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme

[**]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée (*), valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (*)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln(A^2) = 2 \ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(A^n) = n \ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln(\sqrt{A}) = \frac{1}{2} \ln(A)$$

<http://question-type-bac.fr>

SOLUTION

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln(A^2) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2 \ln(A)$$

2. Considérons la propriété \mathcal{P} définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln(A^n) = n \ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln(A^0) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln(A^n) = n \ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant (*) :

$$\ln(A^{n+1}) = \ln(A^n \times A) = \ln(A^n) + \ln(A) = n \ln(A) + \ln(A) = (n + 1) \ln(A)$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n + 1)$. La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vérifié que la propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

3. Dans cette question, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente car n était un entier. Cependant, à l'aide de la propriété (*), on peut écrire :

$$\ln(A) = \ln(\sqrt{A} \times \sqrt{A}) = \ln(\sqrt{A}) + \ln(\sqrt{A}) = 2 \ln(\sqrt{A})$$

D'où, *via* une division par 2 :

$$\ln(\sqrt{A}) = \frac{1}{2} \ln(A)$$