85 exercices « type-bac » **2021**

Voie Générale - Mathématiques

Épreuve finale de terminale

Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Félicitations !
Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

- ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour **l'épreuve finale de spécialité** de terminale (comptant pour le baccalauréat, **coef 16**). L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
- ces exercices sont classés par thèmes avec parfois des thèmes croisés pour optimiser vos révisions. Il n'est pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
- les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;
- n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://question-type-bac.fr/

Table des matières

1 Raisonnement par récurrence **4**

2 Combinatoire et Dénombrement **10**
2.1 Différents outils pour dénombrer . . . 10
2.2 Propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ . . . 18
2.3 Démonstrations exigibles . . . 23

3 Suites **25**
3.1 Suites géométriques . . . 26
3.2 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite) . . . 37
3.3 Utiliser une suite auxiliaire . . . 45
3.4 Démonstrations exigibles . . . 49

4 Limites et asymptotes **52**
4.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles . . . 53
4.2 Formes indéterminées . . . 54
4.3 Utilisation d'un théorème de comparaison . . . 59

5 Continuité et dérivabilité **62**
5.1 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection) . . . 63
5.2 Étudier la dérivabilité d'une fonction . . . 68
5.3 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction . . . 69
5.4 Problèmes nécessitant deux dérivations successives . . . 70
5.5 Équation de la tangente . . . 72
5.6 Lectures graphiques . . . 76
5.7 Convexité . . . 82
5.8 Démonstrations exigibles . . . 86

6 Fonctions exponentielles et logarithmes **88**
6.1 Résoudre une (in)équation . . . 88
6.2 Étude de fonctions . . . 92
6.3 Avec des suites . . . 97
6.4 Démonstrations exigibles . . . 99

7 Géométrie dans l'espace **104**
7.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace . . . 106
7.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques . . . 109
7.3 Combinaisons linéaires de vecteurs dans l'espace . . . 115
7.4 Sphères dans l'espace . . . 118

7.5 Projections orthogonales 120
7.6 Problèmes divers et problèmes d'incidence 123
7.7 Démonstrations exigibles 131

8 Primitives et équations différentielles 134
8.1 Primitives d'une fonction continue 135
8.2 Équations différentielles 140
8.3 Démonstrations exigibles 150

9 Lois de probabilités 152
9.1 Rappel sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance 152
9.1.1 Probabilités conditionnelles 152
9.1.2 Indépendance 154
9.1.3 Démonstrations exigibles 158
9.2 Lois discrètes quelconques 160
9.3 Lois binomiales 163
9.3.1 Démonstrations exigibles 169
9.4 Somme de variables aléatoires 170

10 Annexe : formulaire sur les dérivées 175

THÈME 1

Raisonnement par récurrence

À QUOI ÇA SERT ?

Le principe de raisonnement par récurrence permet de démontrer des propriétés qui sont **indexées par un entier** n telles que par exemple :

$$11^n + 9 \text{ est un multiple de 10 quel que soit l'entier naturel } n$$

Pour démontrer une telle propriété, on ne va pas s'amuser à vérifier qu'elle est vraie pour $n = 0$, puis pour $n = 1$ puis pour $n = 2$ etc. On ne peut pas faire une infinité de vérifications ! En revanche, si on arrive à démontrer que la propriété est *héréditaire* alors il suffira de prouver qu'elle est vraie « au départ » pour en déduire qu'elle vraie à tout rang n. Dans notre exemple, l'hérédité est simple à prouver car on a toujours :

$$11^{n+1} + 9 = 11^n \times 11 + 9 = 11^n \times (10 + 1) + 9 = 11^n \times 10 + 11^n + 9$$

Ce calcul montre simplement « qu'on passe » de $11^n + 9$ à $11^{n+1} + 9$ en ajoutant $11^n \times 10$ qui est justement un multiple de 10. Ainsi, si on suppose que pour un certain n arbitrairement fixé, $11^n + 9$ est un multiple de 10 alors il en sera de même pour $11^{n+1} + 9$. C'est l'hérédité. Et comme la propriété est vraie pour $n = 0$ (car $11^0 + 9 = 10$) alors elle est vraie à tout rang n.
Le raisonnement par récurrence est très utile pour l'étude de certaines suites (lorsqu'on connaît le processus qui permet de passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1}) notamment le sens de variation (croissance ou décroissance de la suite), ou la preuve de l'existence d'un majorant M (resp. d'un minorant m).

Pour plus de détails sur ce sujet, voir : http://question-type-bac.fr/comment-bien-mener-et-rediger-une-recurrence-en-mathematiques/

RAPPEL DE COURS

Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$.

SI :

- la propriété $\mathcal{P}$ est INITIALISÉE à un certain rang n_0, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie } ^{(1)}$$

- la propriété $\mathcal{P}$ est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0, c'est-à-dire :

$$\text{pour } n \geqslant n_0, \ \Big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\Big)$$

ALORS : La propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout rang n plus grand que n_0.

En pratique, on rédige une récurrence en suivant les quatre étapes ci-dessous :

1. on énonce la propriété de travail $\mathcal{P}(n)$;

2. on vérifie l'initialisation en examinant si l'on a $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$ selon le cas) ;

3. on vérifie l'hérédité. Pour cela, on suppose $\mathcal{P}(n)$ **pour un certain entier** n (vérifiant $n \geqslant n_0$) et on en déduit la propriété au rang suivant, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$;

4. on conclut en affirmant que l'on a ainsi démontré que, pour tout entier n (vérifiant $n \geqslant n_0$), on a $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 1 - Démontrer une conjecture [⋆]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

SOLUTION

1. Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer [2] que pour tout entier naturel n :

1. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » ! ?

2. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses. . .). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété resultant d'un certain nombre d'observations.

$$u_n = 2^n - 1$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n, ce qui démontre la conjecture.

....

Exercice 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme [$\star\star$]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée ($\star$), valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

SOLUTION

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln\left(A^2\right) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2\ln(A)$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln\left(A^0\right) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant ($\star$) :

$$\ln\left(A^{n+1}\right) = \ln\left(A^n \times A\right) = \ln\left(A^n\right) + \ln(A) = n\ln(A) + \ln(A) = (n+1)\ln(A)$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.