POURCENTAGES

I. Introduction

Les pourcentages font partie de notre quotidien. Ils sont utilisés partout. On comprend généralement assez facilement ce qu'ils signifient dans un contexte donné mais dès qu'il faut faire des calculs, on est vite perdu... Pourquoi sommes-nous destabilisés face aux calculs avec des pourcentages ? La raison est que, en réalité, cette notion de pourcentage présente une difficulté cachée : **on l'utilise essentiellement dans deux catégories de situations sensiblement différentes** :

Situation 1 | Situation 2

Chacune des deux affirmations ci-dessous parle d'un ***même sujet*** *(les antidépresseurs) et évoque* ***le même pourcentage*** *(35 %) et pourtant chaque affirmation apporte des* ***informations totalement différentes !***

35 % des individus ont déjà pris un traitement à base d'antidépresseurs	La vente d'antidépresseurs a augmenté de 35 % entre l'année 2010 et l'année 2017

C'est pourquoi, avant même de commencer à étudier les pourcentages, il est important de comprendre qu'on utilise ce terme dans ces deux catégories de situations différentes :

Évoquer une ***PROPORTION***	Évoquer une ***ÉVOLUTION***

(Et on verra, au §VI, qu'on peut aussi utiliser des pourcentages pour évoquer une troisième situation : celle d'une ***comparaison***)

Exemples : *dire, dans chaque cas, s'il s'agit d'un pourcentage "proportion" ou d'un pourcentage "évolution"*

- En 2019, 8 % de la population en âge de travailler est au chômage.
- En 2020, le taux de chômage risque encore d'augmenter de 4 %.
- Cette tablette de chocolat contient 70 % de cacao.
- Le prix de cette tablette de chocolat a baissé de 10 %.

Nous allons maintenant étudier les pourcentages et la façon dont on les calcule en fonction de chaque catégorie de situation.

II. Étude des pourcentages lorsqu'ils représentent des *PROPORTIONS*

Dans ce contexte, un pourcentage tel que 50 % représente la moitié de l'effectif (ou quantité) étudié(e).

Un pourcentage tel que 25 % représente le quart de l'effectif (ou quantité) étudié(e).

Mathématiquement parlant : $50\ \% = \dfrac{50}{100} = 0{,}50$ et $25\ \% = \dfrac{25}{100} = 0{,}25$.

Voyons maintenant les principales situations que l'on rencontre avec les pourcentages "proportions". Nous allons, pour chaque cas, travailler d'abord à partir d'exemples concrets puis dégager les formules à connaître. Formules qu'on généralisera ensuite.

SITUATION 1 - *Calculer un certain pourcentage "proportion"*

Exemple 1

Dans une ville de 15000 habitants, il y a 2500 personnes qui portent des lunettes.

Quel pourcentage ces personnes représentent-elles ?

→ Dans ce cas, il suffit de faire **le rapport** entre *l'effectif partiel* et *l'effectif total* :

$$\frac{2500}{15000} \simeq 0{,}1667$$

Cela signifie qu'il y a environ 16,67 % de personnes qui portent des lunettes dans cette ville.

Exemple 2

Dans la recette d'une compote, on lit que pour 1 kg de fruits, il faut rajouter 120 g de sucre. Quel pourcentage de sucre ajouté cela représente-t-il sur la compote ? (On ne tient pas compte de l'évaporation d'eau lors de la cuisson)

→ Dans ce cas, si on suit la recette, on aura 1,120 kg de compote au total. On fait **le rapport** entre la *quantité partielle ou étudiée* (ici le sucre ajouté) et la *quantité totale de référence* :

$$\frac{0{,}120}{1{,}120} \simeq 0{,}1071$$

Cela signifie que cette compote comportera environ 10,71 % de sucre ajouté.

(En réalité, si on tient compte de l'évaporation d'eau lors de la cuisson, ce pourcentage de sucre ajouté est plus élevé)

Bilan : dans les deux exemples ci-dessus, pour calculer notre pourcentage *t*, on a fait le rapport entre l'effectif partiel et l'effectif total ou le rapport entre une quantité partielle et une quantité totale.

D'où la formule générale suivante :

$$t = \frac{\text{grandeur partielle}}{\text{grandeur totale}}$$

où *t* est le pourcentage recherché.

SITUATION 2 - *Appliquer un pourcentage "proportion" à une quantité*

Exemple 3

Dans une ville de 18000 habitants, il y a 22 % de jeunes de moins de 25 ans.

Combien de jeunes de moins de 25 ans y a-t-il exactement dans cette ville ?

→ Dans ce cas, il suffit de multiplier *l'effectif total* (ou la *valeur de référence*) par 0,22 :

$$0{,}22 \times 18000 = 3960$$

Il y a donc 3960 personnes jeunes dans cette ville.

Exemple 4

Dans la composition d'une sauce tomate, on peut lire : sucre = 15 %.

Le pot contient 375 g sauce tomate.

Combien de grammes de sucre y a-t-il dans le pot ?

→ Dans ce cas, il suffit de multiplier la *quantité totale* (ou la *valeur de référence*) par 0,15 :

$$0{,}15 \times 375 = 56{,}25$$

Le pot de sauce tomate contient 56,25 g de sucre.

Bilan : dans les deux exemples ci-dessus, nous avons calculé un *effectif partiel* (ou une *quantité partielle*) en appliquant un certain pourcentage t à un *effectif total* (ou une *valeur de référence*).

La formule est la suivante :

$$\boxed{\text{grandeur partielle} = t \times \text{grandeur totale}}$$

Remarque : on peut constater que cette deuxième formule n'est qu'une variante de la première.

On pourrait également écrire :

$$\boxed{\text{grandeur totale} = \frac{\text{grandeur partielle}}{t}}$$

dans le cas où l'on recherche la grandeur totale connaissant la grandeur partielle et le pourcentage t comme dans l'exemple suivant.

Exemple 5

Dans un bassin de pisciculture, il y a 140 truites. Ces truites représentent 35 % du nombre total de poissons dans le bassin. Combien y a-t-il de poissons, au total, dans le bassin ?

→ La formule précédente nous donne :

$$\text{nombre total de poissons} = \frac{140}{0,35} = 400$$

En fait, toutes ces déclinaisons de formules proviennent d'un même fait : la notion de pourcentage "proportion" est, comme son nom l'indique, une situation de **proportionnalité**. On peut donc présenter les choses à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

Pourcentage	Valeur
t	Valeur **étudiée**
1	Valeur de **référence**

Formule associée :

$$t = \frac{\text{Valeur étudiée}}{\text{Valeur de référence}}$$

La valeur 1 (qui est 100 %) de ce tableau correspond à la valeur de référence. À l'aide de produits en croix, on retrouve toujours la donnée manquante lorsqu'on connaît les autres. Ainsi, juste en mémorisant ce tableau de proportionnalité, on résout toutes les situations relatives aux pourcentages "proportions".

Remarque : peut-on avoir des pourcentages "proportions" supérieurs à 100 % ? Eh bien oui !

Imaginons un couple qui souhaite acquérir un bien immobilier et qui possède un apport de 130 000 €. Ils étudient la possibilité d'achat d'un bien coûtant 190 000 €, tous frais compris ; ils doivent donc emprunter 60 000 €. Si on s'intéresse à ce que représente cet emprunt par rapport à leur apport, on fait alors le calcul suivant :

$$\frac{\text{Valeur étudiée}}{\text{Valeur de référence}} = \frac{60\,000}{130\,000} \simeq 0{,}4615$$

Le couple peut alors affirmer qu'il va emprunter une somme d'argent correspondant à 46 % de leur apport.

Mais s'ils étudient maintenant l'achat d'un bien coûtant 280 000 € (tous frais compris), ils devront emprunter 150 000 € et, cette fois, cela représente :

$$\frac{\text{Valeur étudiée}}{\text{Valeur de référence}} = \frac{150\,000}{130\,000} \simeq 1{,}15...$$

C'est-à-dire 115 % ! Ils devront donc emprunter un montant correspondant à 115 % de leur apport.

III. Étude des pourcentages lorsqu'ils représentent des *ÉVOLUTIONS*

Dans ce contexte, un pourcentage tel que 50 % d'augmentation correspond à une multiplication par 1,50.

Un pourcentage tel que 25 % d'augmentation correspond à une multiplication par un coefficient de 1,25.

Mathématiquement parlant, une augmentation de 50 % va cette fois s'associer à un coefficient de 1,50.

Et comment faire si on a une diminution au lieu d'une augmentation ? La réponse est dans ce qui suit !

SITUATION 3 - *Calculer une quantité après AUGMENTATION d'un certain pourcentage t*

Exemple 6

Un loyer coûtait 550 € / mois en 2018. En 2019, il est prévu qu'il augmente de 7 %.

Quel sera le montant du loyer en 2019 ?

→ On pourrait être tenté de procéder en deux étapes :

- calculer d'abord le montant de l'augmentation en considérant le 7 % comme un pourcentage "proportion" de 550 €. Cela donne $0{,}07 \times 550 = 38{,}5$ €
- on ajoute le montant de cette augmentation au loyer actuel et on obtient : $550 + 38{,}5 = 588{,}5$ € qui sera le montant du loyer mensuel pour 2019.

Mais on peut être **plus efficace** en calculant directement le nouveau loyer en considérant le 7 % comme un pourcentage "évolution". Pour cela il suffit de **multiplier** l'actuel loyer par le coefficient 1,07 :

$$1{,}07 \times 550 = 588{,}5$$

On retrouve bien le même résultat.

Bilan : la formule pour calculer une valeur après **augmentation** est :

$$\boxed{V_f = (1+t)\,V_i}$$

où V_i est la valeur initiale, V_f la valeur finale et t le pourcentage d'augmentation.

Par exemple, si une quantité initiale V_i augmente de 14 % (on a donc $t = 0{,}14$), il suffit de la multiplier par 1,14 pour obtenir ce qu'elle devient au final.

Vocabulaire : le nombre $(1 + t)$ s'appelle le ***coefficient multiplicateur*** associé à la hausse de t %.

Il est important d'arriver à convertir mentalement un pourcentage d'augmentation en coefficient multiplicateur et réciproquement. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples :

Interprétation	Coefficient multiplicateur c	Pourcentage d'augmentation t
Augmentation de 1 %	$c = 1{,}01$	$t = 0{,}01$ (= 1 %)
Augmentation de 5 %	$c = 1{,}05$	$t = 0{,}05$ (= 5 %)
Augmentation de 10 %	$c = 1{,}10$	$t = 0{,}10$ (= 10 %)
Augmentation de 20 %	$c = 1{,}20$	$t = 0{,}20$ (= 20 %)
Augmentation de 50 %	$c = 1{,}50$	$t = 0{,}50$ (= 50 %)
Augmentation de 99 %	$c = 1{,}99$	$t = 0{,}99$ (= 99 %)
La valeur double (augmentation de 100 %)	$c = 2$	$t = 1$ (= 100 %)
La valeur triple (augmentation de 200 %)	$c = 3$	$t = 2$ (= 200 %)
La valeur est multipliée par 10 (augmentation de 900 %)	$c = 10$	$t = 9$ (= 900 %)

Application importante des pourcentages d'augmentation : la T.V.A.

La T.V.A. (taxe sur la valeur ajoutée) est un impôt collecté par l'État sur tous les produits commercialisés. En France, en 2019, le taux standard de T.V.A. est de 20 % (il existe un taux minoré sur des produits de première nécessité et un taux majoré sur les produits de luxe). Concrètement, si un commerçant souhaite avoir une recette de 100 € sur un produit qu'il va commercialiser, il devra l'afficher au prix de 120 €. Le prix de 100 € s'appelle le *prix hors taxe* ; c'est ce que reçoit le commerçant. Le prix de 120 € s'appelle le *prix toutes taxes comprises* ; c'est ce que paye le consommateur. La différence (ici de 20 €) est la T.V.A. qui "va dans les caisses de l'État".

Le prix T.T.C. s'obtient donc à partir du prix H.T. après une augmentation de 20 % de T.V.A. ce qui donne la formule suivante :

$$\boxed{\text{Prix\_TTC} = 1{,}20 \times \text{Prix\_HT}}$$

Bien sûr, le coefficient multiplicateur de 1,20 est à adapter si on a affaire à un autre taux de T.V.A.

Exemple 7

Un article coûte 230 € H.T. Quel est son prix T.T.C. ?

Un autre article coûte 288 € T.T.C. Quel est son prix H.T. ?

→ Pour le premier article, on a :

$$\text{Prix\_TTC} = 1{,}20 \times \text{Prix\_HT} = 1{,}20 \times 230 = 276 \text{ €}$$

Pour le second article, on a :

$$\text{Prix\_HT} = \text{Prix\_TTC} / 1{,}20 = 288 / 1{,}20 = 240 \text{ €}$$

ⓘ Pour calculer un prix TTC, on multiplie par 1,20. Pour calculer un prix HT, on **divise** par 1,20.

SITUATION 4 - *Calculer une quantité après DIMINUTION d'un certain pourcentage t*

Exemple 8

Un téléphone coûtait 480 € en 2018. En 2019, il est prévu qu'il baisse de 15 %.

Quel sera le prix de ce téléphone en 2019 ?

→ Comme dans l'exemple 6, on pourrait procéder en deux étapes. Mais on peut être plus efficace en multipliant directement le prix initial par le coefficient 0,85 pour obtenir directement le nouveau prix :

$$0{,}85 \times 480 = 408$$

Le téléphone coûtera 408 € en 2019.

Bilan : la formule pour calculer une valeur après **diminution** est :

$$\boxed{V_f = (1 - t)\, V_i}$$

où V_i est la valeur initiale, V_f la valeur finale et t le pourcentage de baisse.

Par exemple, si une quantité initiale V_i baisse de 14 % (on a donc $t = 0{,}14$), il suffit de la multiplier par 0,86 pour obtenir ce qu'elle devient au final.

Vocabulaire : le nombre $(1 - t)$ s'appelle le ***coefficient multiplicateur*** associé à la baisse de t %.

Il est important d'arriver à convertir mentalement un pourcentage de diminution en coefficient multiplicateur et réciproquement. Le tableau ci-dessous donne quelques exemples :

Interprétation	Coefficient multiplicateur c	Pourcentage de baisse t
Baisse de 1 %	$c = 0,99$	$t = 0,01$ (= 1 %)
Baisse de 5 %	$c = 0,95$	$t = 0,05$ (= 5 %)
Baisse de 10 %	$c = 0,90$	$t = 0,10$ (= 10 %)
Baisse de 20 %	$c = 0,80$	$t = 0,20$ (= 20 %)
Baisse de 50 % (quantité divisée par 2)	$c = 0,50$	$t = 0,50$ (= 50 %)
Baisse de 99 %	$c = 0,01$	$t = 0,99$ (= 99 %)
Baisse de 100 % (on perd tout)	$c = 0$	$t = 1$ (= 100 %)

Noter que pour calculer une valeur après diminution, on peut encore utiliser la formule précédente de l'augmentation $V_f = (1 + t)\ V_i$ mais en prenant une **valeur négative** pour le pourcentage t. La **formule centrale** des pourcentages "évolutions" est donc tout simplement :

$$\boxed{V_f = c\ V_i} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{V_f = (1 + t)\ V_i}$$

où c est le coefficient multiplicateur associé à l'**évolution (c > 1 en cas de hausse, c < 1 en cas de baisse)**.

Lorsqu'une grandeur subit plusieurs évolutions successives (augmentation ou diminution), il suffit de multiplier tous les coefficients multiplicateurs entre eux pour trouver la valeur finale.

Exemple 9

Un article coûte initialement 80 €. Il baisse de 10 % puis encore de 5 % puis il augmente de 15 %.

Combien coûte-t-il au final ?

→ Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 % est $c_1 = 0,90$.

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 5 % est $c_2 = 0,95$.

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 15 % est $c_3 = 1,15$.

Ainsi, le coût final s'obtient via le calcul suivant :

$$1,15 \times 0,95 \times 0,90 \times 80 \simeq 78,66$$

Le livre coûte finalement 78,66 €.

Au passage, cet exemple montre qu'une hausse de 10 % suivie d'une autre hausse de 5 % n'est pas compensée par une baisse de 15 %. Nous verrons les différents pièges sur les pourcentages au paragraphe suivant.

SITUATION 5 - *Calculer un pourcentage d'évolution*

Une grandeur passe d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f. De quel pourcentage a-t-elle évolué ?

La formule centrale sur les pourcentages vue ci-dessus nous permet d'écrire :

$$c = \frac{V_f}{V_i}$$

Cette première formule nous donne le **coefficient multiplicateur** correspondant à l'évolution.

Or, sachant que $c = 1 + t$, on a : $1 + t = \frac{V_f}{V_i}$

$$t = \frac{V_f}{V_i} - 1$$

Et en réduisant au même dénominateur : $t = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i}$

D'où une seconde formule très utilisée : $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$

Ces deux formules sont équivalentes. Chacun utilisera celle qu'il préfère !

Cette deuxième formule nous donne directement le **pourcentage d'évolution** correspondant.

Exemple 10

Dans une ville, il y avait 3500 retraités en 2018. En 2019, il y avait 3850 retraités.

De quel pourcentage a augmenté ce nombre de retraités entre 2018 et 2019 ?

→ Dans cet exemple, on a $V_i = 3500$ et $V_f = 3850$. Il suffit de faire le rapport de ces deux grandeurs :

$$c = \frac{V_f}{V_i} = \frac{3850}{3500} = 1{,}10$$

On obtient un coefficient multiplicateur de 1,10. Autrement dit, la hausse des retraités est de 10 %.

En utilisant la seconde formule, on obtient directement le résultat sous forme de pourcentage (ici 10 %) :

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{3850 - 3500}{3500} = 0{,}10$$

IV. Les pièges sur les pourcentages "évolutions"

Deux erreurs classiques sur les pourcentages sont à éviter. Elles sont souvent commises, même par des professionnels de l'information (comme certains journalistes[1] ...).

On a tendance à croire qu'une hausse d'un certain pourcentage sera compensée par une baisse du même pourcentage. Mais ce n'est pas le cas ! Prenons un exemple simple d'un article qui coûterait initialement 100 €. S'il augmente de 20 %, il côute alors 120 €. Mais s'il baisse maintenant de 20 %, il ne coûtera plus que de 96 €. On ne retombe pas sur le prix de départ. Cela provient du fait que la baisse de 20 % a été calculée sur la base d'une valeur plus élevée que la hausse initiale de 20 %.

On retiendra donc que : ***une hausse de t % n'est pas compensée par une baisse de t %***

Une autre erreur classique consiste à croire que si une quantité augmente par exemple successivement de 10 % puis de 20 %, elle aura augmenté globalement de 30 %. Mais ce n'est pas le cas ! Prenons un exemple simple d'un article qui coûterait initialement 100 €. Après une première hausse de 10 %, il côute 110 €. Puis après une hausse de 20 %, il passe alors à 132 €. Ce qui ne donne pas 130 € comme on aurait pu l'imaginer !

On retiendra donc que :

Une évolution de t_1 % suivie d'une évolution de t_2 % n'est pas égale à une évolution de ($t_1 + t_2$) %

---

(1) Voir par exemple ce lien : http://www.math93.com/index.php/humour-et-maths/543-jt-de-13h-de-france-2-une-erreur-de-mathematiques-en-direct

V. Pourcentage d'évolution global, moyen et réciproque

On a vu au paragraphe précédent que les pourcentages d'évolution ne "s'additionnent" pas. Une hausse de 30 % suivie d'une hausse de 40 % ne donnera pas une hausse de 70 %. Mais alors, ça donnera quoi ? Comment la calculer ?

SITUATION 6 - *Pourcentage d'évolution GLOBAL*

Si une valeur initiale V_i subit plusieurs évolutions pour devenir une valeur finale V_f, alors cette valeur finale s'obtient de V_i en multipliant par tous les coefficients multiplicateurs correspondants :

$$V_f = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n \times V_i$$

Le pourcentage d'évolution global s'obtient donc à partir du coefficient multiplicateur global c_{global} donné par :

$$\boxed{c_{global} = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n}$$

Ainsi, une hausse de 30 % suivie d'une hausse de 40 % donne 1,30 × 1,40 = 1,82 c'est-à-dire 82 % et non 70 % !

Cas particulier : si toutes les évolutions intermédiaires correspondent à des coefficients multiplicateurs **identiques** (évolutions de même pourcentage) que nous noterons c, alors la formule précédente devient :

$$\boxed{c_{global} = c^n}$$

Ainsi, trois hausses successives de 20 % amènent au calcul $1{,}20^3 = 1{,}728$ c'est-à-dire une hausse de 72,8 %.

Anecdote 1 : un statisticien affirma un jour que 6 × 7 = 50. Tout le monde trouva cela ridicule. Et pourtant, ce qu'il entendait par sa multiplication mystère, c'est que 6 évolutions successives de 7 % ne donnent pas 42 % mais 50 % (à moins d'un millième près). En effet :

$$1{,}07^6 \simeq 1{,}5007$$

Exemple 11

Dans un pays, le nombre d'étudiants diplômés était de 64000 en 2015.

En 2016, ce nombre a augmenté de 5 %.

En 2017, ce nombre a augmenté de 7 %

En 2018, ce nombre a augmenté de 25 %.

En 2019, ce nombre a baissé de 5 %.

Globalement, entre 2015 et 2019, de quel pourcentage a-t-il évolué ?

→ On n'a même pas besoin de la donnée initiale de 64000 étudiants pour faire le calcul !

Il suffit de multiplier entre eux tous les coefficients multiplicateurs :

$$c_{global} = c_1 \times c_2 \times c_3 \times c_4 = 1{,}05 \times 1{,}07 \times 1{,}25 \times 0{,}95 \simeq 1{,}334$$

Cela signifie que, **globalement**, le nombre d'étudiants diplômés a augmenté de 33,4 % entre 2015 et 2019.

Anecdote 2 : une quantité augmente de 20 % puis encore de 25 % et finalement baisse de 10 %. Est-il vrai qu'elle a **globalement** augmenté de 35 % ?

On pourrait être tenté de répondre que non d'après ce qu'on a vu sur les pièges sur les pourcentages. Et c'est effectivement la réponse qu'il faudrait donner en général à ce type de question. Cependant, ici, les pourcentages ont été judicieusement choisis pour que la réponse soit affirmative. En effet, on a :

$$1{,}20 \times 1{,}25 \times 0{,}9 = 1{,}35\ldots$$

SITUATION 7 - *Pourcentage d'évolution MOYEN*

Si une valeur initiale V_i subit plusieurs évolutions durant n périodes de durées identiques (par exemple des années) pour devenir une valeur finale V_f, alors en moyenne sur chaque période, quelle est l'augmentation ? Notons c_{moyen} le coefficient multiplicateur recherché.

D'une part, on sait que : $$V_f = c_1 \times c_2 \times ... \times c_n \times V_i$$

Mais d'autre part, on a aussi : $$V_f = (c_{moyen})^n \times V_i$$

On a donc : $$(c_{moyen})^n = c_1 \times c_2 \times ... \times c_n$$

D'où la formule suivante :

$$\boxed{c_{moyen} = \sqrt[n]{c_1 \times c_2 \times ... \times c_n} = \sqrt[n]{c_{global}}}$$

En particulier, si on a seulement deux périodes, cette formule devient :

$$\boxed{c_{moyen} = \sqrt{c_1 \times c_2} = \sqrt{c_{global}}}$$

Exemple 12

Dans un pays, le prix des carburants a augmenté globalement de 30 % entre 2016 et 2018.

En moyenne, sur cette période 2016 - 2018, de quel pourcentage ce prix augmente-t-il par année ?

→ Notons c_{moyen} le coefficient multiplicateur annuel moyen. On sait que :

$$c_{global} = (c_{moyen})^2 = 1,30$$

Donc : $$c_{moyen} = \sqrt{1,30} \simeq 1,14$$

Cela signifie que, **en moyenne**, le prix des carburants a augmenté de 14 % par an.

Exemple 13

Dans un autre pays, le prix des carburants a augmenté de 30 % entre 2016 et 2017 puis de 10 % entre 2017 et 2018. En moyenne sur cette période 2016 - 2018, de quel pourcentage ce prix augmente-t-il par année ?

→ Notons c_{moyen} le coefficient multiplicateur annuel moyen. On sait que d'une part que :

$$c_{global} = (c_{moyen})^2$$

Mais d'autre part, on sait que : $$c_{global} = c_1 \times c_2 = 1,10 \times 1,20 = 1,32$$

Donc : $$(c_{moyen})^2 = c_1 \times c_2$$

$$c_{moyen} = \sqrt{c_1 \times c_2} = \sqrt{1,32} \simeq 1,149$$

Cela signifie que, **en moyenne**, le prix des carburants a augmenté de 14,9 % par an.

Remarque

La quantité suivante : $$\sqrt[n]{c_1 \times c_2 \times ... \times c_n}$$

s'appelle la ***moyenne géométrique*** des nombres c_1, c_2, ... et c_n.

En particulier, la quantité suivante :

$$\sqrt{a \times b}$$

s'appelle la ***moyenne géométrique*** des nombres a et b.

Le coefficient multiplicateur moyen est donc la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs partiels.

On a également vu au paragraphe précédent qu'une hausse de t % n'est pas compensée par une baisse de t %. Par exemple, une hausse de 10 % n'est pas compensée par une baisse de 10 %. Mais alors quelle baisse va compenser une hausse de 10 % ?

SITUATION 8 - *Pourcentage d'évolution RÉCIPROQUE*

Si une une valeur initiale V_i subit une évolution d'un certain pourcentage (donc multiplication par un coefficient multiplicateur c_{direct}), par quel coefficient multiplicateur $c_{réciproque}$ doit-elle être multipliée pour revenir à sa valeur initiale ?

La formule est la suivante :

$$\boxed{c_{direct} \times c_{réciproque} = 1}$$

Ainsi, si on a une hausse de 10 %, cela fait un coefficient multiplicateur $c_{direct} = 1{,}10$. Le coefficient multiplicateur réciproque est donc $c_{réciproque} = 1 / c_{direct} = 1 / 1{,}10 \simeq 0{,}909$ c'est-à-dire une baisse de 9,1 % environ. Une hausse de 10 % est donc compensée par une baisse de 9,1 % environ !

Exemple 13

Dans un pays, un certain président a augmenté les impôts de 25 %.

Le président suivant décide d'annuler cette hausse. De quel pourcentage doit-il baisser les impôts ?

→ On a donc $c_{direct} = 1{,}25$. On cherche le coefficient multiplicateur $c_{réciproque}$. On sait que :

$$c_{direct} \times c_{réciproque} = 1$$

Cela donne :

$$c_{réciproque} = 1 / 1{,}25 = 0{,}80$$

Le nouveau président doit donc baisser les impôts de 20 % pour annuler la hausse précédente de 25 %.

VI. Comparaison de deux valeurs

Il peut arriver qu'on souhaite **comparer** deux valeurs A et B dont l'une n'est pas une *évolution* de l'autre ni une *proportion* de l'autre. Voyons cela sur un exemple typique.

Exemple 14

Dans un pays, la retraite moyenne d'une femme est de 1050 € / mois et celle d'un homme 1750 € / mois.

Exprimer, en pourcentage, cette différence.

Le problème ici est qu'il n'y a pas de *valeur initiale* ni de *valeur finale*.

On ne sait pas non plus que prendre comme *valeur de référence*.

On a pourtant envie de calculer le rapport entre les deux valeurs, mais dans quel sens ?

Si on prend la retraite des hommes comme valeur de référence et qu'on calcule ce que les femmes gagnent en moins par rapport aux hommes, celà nous mène au rapport suivant :

$$\frac{1050}{1750} = 0{,}60$$

et à la conclusion que **les femmes gagnent 40% de moins que les hommes**.

Mais si on prend la retraite des femmes comme valeur de référence et qu'on calcule ce que les hommes gagnent en plus par rapport aux femmes, celà nous mène au rapport inversé :

$$\frac{1750}{1050} \simeq 1{,}667$$

et à la conclusion que **les hommes gagnent 66,7% de plus que les femmes**.

Alors, quel point de vue adopter ? Ne sommes-nous pas dans une situation où l'on peut faire dire ce qu'on veut aux pourcentages ? En effet, selon que l'on souhaite atténuer ou accentuer l'écart entre les retraites des hommes et des femmes, on choisira un point de vue ou l'autre...

Une parade consiste à *symétriser* le problème à l'aide d'une moyenne. En supposant qu'il y ait autant de retraités hommes que femmes (hypothèse très éloignée de la réalité), on pourrait dire, qu'en moyenne, la pension d'un retraité est :

$$\frac{1050+1750}{2} = 1400$$

Nous avons fait une moyenne *arithmétique* et on peut alors prendre cette moyenne comme valeur de référence.

Dans ce cas, cela donnerait pour les femmes le rapport suivant :

$$\frac{1050}{1400} \simeq 0{,}75$$

et la conclusion que les femmes retraitées gagnent 25 % de moins que la moyenne de la population.

Et pour les hommes, le rapport suivant :

$$\frac{1750}{1400} \simeq 1{,}25$$

et la conclusion que les hommes retraités gagnent 25 % de plus que la moyenne de la population.

Pour **comparer** deux valeurs A et B dont l'une n'est pas une *évolution* de l'autre ni une *proportion* de l'autre, il est donc judicieux et pertinent de les comparer respectivement à leur moyenne arithmétique.

VII. Résumé

Pour l'étude des **proportions**, il n'y a finalement qu'une seule formule :

$$\boxed{V_r = t \times V_e}$$

où V_r est la valeur de référence, V_e la valeur étudiée et t le pourcentage de ce que représente la valeur étudiée relativement à la valeur de référence.

Pour l'étude des **évolutions,** il vaut mieux raisonner à l'aide de coefficients multiplicateurs. Dans ce cas, on a une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f qui sont liées par la relation :

$$\boxed{V_f = c \times V_i}$$

où le lien entre le coefficient multiplicateur c et le pourcentage d'évolution t est donné par :

$$\boxed{c = 1 + t}$$

(où $t > 0$ en cas de hausse et $t < 0$ en cas de baisse)

En présence de plusieurs évolutions successives associées à des coefficients multiplicateurs c_1, c_2, ..., c_n, la formule $V_f = c \times V_i$ devient alors :

$$\boxed{V_f = c_1 \times c_2 \times ... \times c_n \times V_i}$$

Le coefficient multiplicateur global c_{global} est donc donné par :

$$\boxed{c_{global} = c_1 \times c_2 \times ... \times c_n}$$

Le coefficient multiplicateur moyen c_{moyen} est, quant à lui, donné par :

$$\boxed{c_{global} = (c_{moyen})^n}$$

En présence de deux évolutions successives, on a donc $V_f = c_1 \times c_2 \times V_i$. Si on souhaite avoir $V_f = V_i$ (pour retomber sur nos pieds), il est alors nécessaire d'avoir $c_1 \times c_2 = 1$. Autrement dit, si on a évolution directe (associée à un coefficient multiplicateur c_{direct}), le coefficient multiplicateur $c_{réciproque}$ associé à l'évolution réciproque compensant la première évolution vérifie :

$$\boxed{c_{direct} \times c_{réciproque} = 1}$$