# 85 exercices « type-bac »

## Voie Générale - Mathématiques

# Épreuve finale de terminale

### Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Bonne lecture et bon travail !

Remarques importantes :

- ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour **l'épreuve finale de spécialité** de terminale (comptant pour le baccalauréat, **coef 16**). L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
- ces exercices sont classés par thèmes avec parfois des thèmes croisés pour optimiser vos révisions. Il n'est pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
- les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

# Table des matières

THÈME 1

# Raisonnement par récurrence

## À QUOI ÇA SERT ?

Le principe de raisonnement par récurrence permet de démontrer des propriétés qui sont **indexées par un entier** $n$ telles que par exemple :

$$11^n + 9 \text{ est un multiple de 10 quel que soit l'entier naturel } n$$

Pour démontrer une telle propriété, on ne va pas s'amuser à vérifier qu'elle est vraie pour $n = 0$, puis pour $n = 1$ puis pour $n = 2$ etc. On ne peut pas faire une infinité de vérifications ! En revanche, si on arrive à démontrer que la propriété est *héréditaire* alors il suffira de prouver qu'elle est vraie « au départ » pour en déduire qu'elle vraie à tout rang $n$. Dans notre exemple, l'hérédité est simple à prouver car on a toujours :

$$11^{n+1} + 9 = 11^n \times 11 + 9 = 11^n \times (10 + 1) + 9 = 11^n \times 10 + 11^n + 9$$

Ce calcul montre simplement « qu'on passe » de $11^n + 9$ à $11^{n+1} + 9$ en ajoutant $11^n \times 10$ qui est justement un multiple de 10. Ainsi, si on suppose que pour un certain $n$ arbitrairement fixé, $11^n + 9$ est un multiple de 10 alors il en sera de même pour $11^{n+1} + 9$. C'est l'hérédité. Et comme la propriété est vraie pour $n = 0$ (car $11^0 + 9 = 10$) alors elle est vraie à tout rang $n$.
Le raisonnement par récurrence est très utile pour l'étude de certaines suites (lorsqu'on connaît le processus qui permet de passer d'un terme $u_n$ au suivant $u_{n+1}$) notamment le sens de variation (croissance ou décroissance de la suite), ou la preuve de l'existence d'un majorant $M$ (resp. d'un minorant $m$).

## RAPPEL DE COURS

### Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$.

SI :

- la propriété $\mathcal{P}$ est INITIALISÉE à un certain rang $n_0$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}$$ [1]

- la propriété $\mathcal{P}$ est HÉRÉDITAIRE à partir du rang $n_0$, c'est-à-dire :

$$\text{pour } n \geqslant n_0,\ \Big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\Big)$$

ALORS : La propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout rang $n$ plus grand que $n_0$.

En pratique, on rédige une récurrence en suivant les quatre étapes ci-dessous :

**1.** on énonce la propriété de travail $\mathcal{P}(n)$ ;

**2.** on vérifie l'initialisation en examinant si l'on a $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$ selon le cas) ;

**3.** on vérifie l'hérédité. Pour cela, on suppose $\mathcal{P}(n)$ **pour un certain entier** $n$ (vérifiant $n \geqslant n_0$) et on en déduit la propriété au rang suivant, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$ ;

**4.** on conclut en affirmant que l'on a ainsi démontré que, pour tout entier $n$ (vérifiant $n \geqslant n_0$), on a $\mathcal{P}(n)$.

### Exercice 1 - Démontrer une conjecture [⋆]

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 1 \end{cases}$$

**1.** Conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**2.** Démontrer cette conjecture par récurrence.

## SOLUTION

**1.** Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer [2] que pour tout entier naturel $n$ :

1. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » ! ?

2. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses. . . ). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété resultant d'un certain nombre d'observations.

$$u_n = 2^n - 1$$

**2.** Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle sera donc vraie pour tout rang $n$, ce qui démontre la conjecture.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Exercice 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme [$\star\star$]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée ($\star$), valable pour toutes quantités $A$ et $B$ strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

**1.** À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout $A$ strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

**2.** En déduire, par récurrence, que pour tout $A$ strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

**3.** Démontrer que, pour tout $A$ strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

## SOLUTION

**1.** Il suffit de remplacer $B$ par $A$ pour obtenir :

$$\ln\left(A^2\right) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2\ln(A)$$

**2.** Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln\left(A^0\right) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$ : $\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant ($\star$) :

$$\ln\left(A^{n+1}\right) = \ln\left(A^n \times A\right) = \ln\left(A^n\right) + \ln(A) = n\ln(A) + \ln(A) = (n+1)\ln(A)$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.