

85 exercices « type-bac »
Voie Générale - Mathématiques
Épreuve finale de terminale
Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité! Bonne lecture et bon travail!

Remarques importantes :

- ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour **l'épreuve finale de spécialité** de terminale (comptant pour le baccalauréat, **coef 16**). L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
- ces exercices sont classés par thèmes avec parfois des thèmes croisés pour optimiser vos révisions. Il n'est pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
- les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

Table des matières

1	Raisonnement par récurrence	3
2	Combinatoire et Dénombrement	9
2.1	Différents outils pour dénombrer	9
2.2	Propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$	17
2.3	Démonstrations exigibles	22
3	Suites	24
3.1	Suites géométriques	25
3.2	Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)	36
3.3	Utiliser une suite auxiliaire	44
3.4	Démonstrations exigibles	48
4	Limites et asymptotes	51
4.1	Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	52
4.2	Formes indéterminées	53
4.3	Utilisation d'un théorème de comparaison	58
5	Continuité et dérivabilité	61
5.1	Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection)	62
5.2	Étudier la dérivabilité d'une fonction	67
5.3	Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction	68
5.4	Problèmes nécessitant deux dérivations successives	69
5.5	Équation de la tangente	71
5.6	Lectures graphiques	75
5.7	Convexité	81
5.8	Démonstrations exigibles	85
6	Fonctions exponentielles et logarithmes	87
6.1	Résoudre une (in)équation	87
6.2	Étude de fonctions	91
6.3	Avec des suites	96
6.4	Démonstrations exigibles	98
7	Géométrie dans l'espace	103
7.1	Equations cartésiennes des plans de l'espace	105
7.2	Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques	108
7.3	Combinaisons linéaires de vecteurs dans l'espace	114
7.4	Sphères dans l'espace	117

7.5 Projections orthogonales 119

7.6 Problèmes divers et problèmes d'incidence 122

7.7 Démonstrations exigibles 130

8 Primitives et équations différentielles 133

8.1 Primitives d'une fonction continue 134

8.2 Équations différentielles 139

8.3 Démonstrations exigibles 149

9 Lois de probabilités 151

9.1 Rappel sur les probabilités conditionnelles et l'indépendance 151

9.1.1 Probabilités conditionnelles 151

9.1.2 Indépendance 153

9.1.3 Démonstrations exigibles 157

9.2 Lois discrètes quelconques 159

9.3 Lois binomiales 162

9.3.1 Démonstrations exigibles 168

9.4 Somme de variables aléatoires 169

10 Annexe : formulaire sur les dérivées 174

Raisonnement par récurrence

À QUOI ÇA SERT ?

Le principe de raisonnement par récurrence permet de démontrer des propriétés qui sont **indexées par un entier** n telles que par exemple :

$$11^n + 9 \text{ est un multiple de } 10 \text{ quel que soit l'entier naturel } n$$

Pour démontrer une telle propriété, on ne va pas s'amuser à vérifier qu'elle est vraie pour $n = 0$, puis pour $n = 1$ puis pour $n = 2$ etc. On ne peut pas faire une infinité de vérifications ! En revanche, si on arrive à démontrer que la propriété est *héréditaire* alors il suffira de prouver qu'elle est vraie « au départ » pour en déduire qu'elle est vraie à tout rang n . Dans notre exemple, l'hérédité est simple à prouver car on a toujours :

$$11^{n+1} + 9 = 11^n \times 11 + 9 = 11^n \times (10 + 1) + 9 = 11^n \times 10 + 11^n + 9$$

Ce calcul montre simplement « qu'on passe » de $11^n + 9$ à $11^{n+1} + 9$ en ajoutant $11^n \times 10$ qui est justement un multiple de 10. Ainsi, si on suppose que pour un certain n arbitrairement fixé, $11^n + 9$ est un multiple de 10 alors il en sera de même pour $11^{n+1} + 9$. C'est l'hérédité. Et comme la propriété est vraie pour $n = 0$ (car $11^0 + 9 = 10$) alors elle est vraie à tout rang n .

Le raisonnement par récurrence est très utile pour l'étude de certaines suites (lorsqu'on connaît le processus qui permet de passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1}) notamment le sens de variation (croissance ou décroissance de la suite), ou la preuve de l'existence d'un majorant M (resp. d'un minorant m).

RAPPEL DE COURS

Raisonnement par récurrence

Soit \mathcal{P} une propriété définie sur \mathbb{N} .

SI :

- la propriété \mathcal{P} est INITIALISÉE à un certain rang n_0 , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie }^{(1)}$$

- la propriété \mathcal{P} est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0 , c'est-à-dire :

$$\text{pour } n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$$

ALORS :

La propriété \mathcal{P} est vraie à tout rang n plus grand que n_0 .

En pratique, on rédige une récurrence en suivant les quatre étapes ci-dessous :

- on énonce la propriété de travail $\mathcal{P}(n)$;
- on vérifie l'initialisation en examinant si l'on a $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$ selon le cas) ;
- on vérifie l'hérédité. Pour cela, on suppose $\mathcal{P}(n)$ **pour un certain entier** n (vérifiant $n \geq n_0$) et on en déduit la propriété au rang suivant, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$;
- on conclut en affirmant que l'on a ainsi démontré que, pour tout entier n (vérifiant $n \geq n_0$), on a $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 1 - Démontrer une conjecture

[★]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

- Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

SOLUTION

- Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer ⁽²⁾ que pour tout entier naturel n :

1. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » ! ?

2. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses...). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété résultant d'un certain nombre d'observations.

$$u_n = 2^n - 1$$

2. Considérons la propriété \mathcal{P} définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geq 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n + 1)$. La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geq 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n , ce qui démontre la conjecture.

Exercice 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme

[**]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée (\star), valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln(A^2) = 2 \ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(A^n) = n \ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln(\sqrt{A}) = \frac{1}{2} \ln(A)$$

SOLUTION

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln(A^2) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2 \ln(A)$$

2. Considérons la propriété \mathcal{P} définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln(A^n) = n \ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln(A^0) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln(A^n) = n \ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant (\star) :

$$\ln(A^{n+1}) = \ln(A^n \times A) = \ln(A^n) + \ln(A) = n \ln(A) + \ln(A) = (n + 1) \ln(A)$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n + 1)$. La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.