# 33 exercices « type-bac »

## Voie Générale - Mathématiques

# **Épreuves communes - Fin de 1re**

### **Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours**

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Bonne lecture et bon travail !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour **l'évaluation commune de contrôle continu** de fin de classe de première (comptant pour le baccalauréat, **coef 5**) ou pour préparer votre passage en terminale. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
2. ces exercices sont classés par thèmes avec parfois des thèmes croisés pour optimiser vos révisions. Il n'est pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
3. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

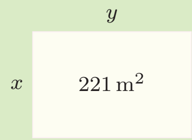
# Table des matières

THÈME 1

# Second degré

## À QUOI ÇA SERT ?

Un terrain rectangulaire possède une aire de 221 m$^2$ et un périmètre de 60 m.
Peut-on retrouver ses dimensions (longueur et largeur) ?




Notons $x$ sa largeur et $y$ sa longueur. On sait donc que :

$$\begin{cases} x \times y = 221 & \text{(aire du rectangle)} \\ 2x + 2y = 60 & \text{(périmètre du rectangle)} \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système, on peut procéder par substitution. La deuxième équation s'écrit $x + y = 30$ ce qui permet facilement d'isoler une des deux inconnues, par exemple $y = 30 - x$. Puis en remplaçant $y$ par $30 - x$ dans la première équation, on obtient :

$$x \times (30 - x) = 221$$

$$30x - x^2 = 221$$

Et en réorganisant : $$x^2 - 30x + 221 = 0$$

Une telle équation est dite du « second degré ». Comment la résoudre ?
C'est ce que nous allons découvrir dans ce chapitre ! Dans notre cas, les deux premiers termes de l'équation ($x^2 - 30x$) peuvent évoquer une certaine identité remarquable, à savoir $(x - 15)^2 = x^2 - 30x + 225$. Mais dans notre équation nous avons 221 et pas 225. On peut cependant ruser un peu en écrivant :

$$x^2 - 30x + 225 - 4 = 0$$

Ainsi, via l'identité remarquable précédente, on peut écrire :

$$(x - 15)^2 - 4 = 0$$

On peut alors faire apparaître une différence de deux carrés :

$$(x - 15)^2 - 2^2 = 0$$

Et via l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ nous pouvons factoriser l'équation :

$$(x - 15 + 2)(x - 15 - 2) = 0$$

$$(x - 13)(x - 17) = 0$$

Et via la règle du produit nul, on trouve : $x = 13$ ou $x = 17$

Ce technique de résolution appliquée ici peut-elle se généraliser ? Et peut-on déterminer des formules générales pour obtenir directement les solutions sans avoir à refaire systématiquement ces calculs ? Nous allons voir que la réponse à ces questions est oui !
Et pour en revenir à notre rectangle, comme on avait posé pour largeur $x$ et pour longueur $y = 30 - x$, on en conclut que nous avons affaire à un rectangle de largeur 13 m et de longueur 17 m.

## RAPPEL DE COURS

### Fonction polynôme du second degré

Une *fonction polynôme du second degré* est une fonction $f$ dont l'écriture peut **se ramener** à la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a,\, b \text{ et } c \text{ sont des coefficients avec } a \neq 0$$

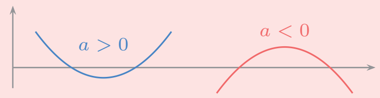
L'expression $ax^2 + bx + c$ est souvent également appelée *un trinôme du second degré*.

Une valeur $x_0$ pour laquelle on a $f(x_0) = 0$ est appelée une *racine* de la fonction $f$ (ou du trinôme).

Exemple : le réel $x_0 = 3$ est une racine du trinôme $2x^2 - 5x - 3$ (il y a également $-\frac{1}{2}$).

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** :

- tournée « vers le haut » lorsque $a > 0$ ;
- tournée « vers le bas » lorsque $a < 0$.




Le sommet $S$ de la parabole a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Son ordonnée est $f(\alpha)$.

Une fonction polynôme du second degré admet plusieurs formes d'écritures :

- la *forme développée*, par exemple $2x^2 - 5x - 3$ ;
- la *forme canonique* $a(x-\alpha)^2 + f(\alpha)$, par exemple $2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$ ;
- et le cas échéant, la *forme factorisée* $a(x - x_1)(x - x_2)$, par exemple : $2(x-3)(x+\frac{1}{2})$ ou $(x-3)(2x+1)$.

### Équation du second degré

Pour résoudre une équation du $2^{\text{nd}}$ degré $ax^2+bx+c = 0$, on examine déjà s'il y a un moyen simple de factoriser afin de se ramener à un *produit nul* ; c'est souvent le cas lorsque le trinôme est *incomplet* comme par exemple $4x^2 + x = x(4x+1)$ ou $4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$. Cela permet de trouver immédiatement les racines.

À défaut, on calcule le discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis :

- si $\Delta > 0$, alors le trinôme admet deux racines $x_{1\,,\,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
- si $\Delta = 0$, alors le trinôme admet une seule racine $\alpha = \frac{-b}{2a}$ ;
- si $\Delta < 0$, alors le trinôme n'admet pas de racine réelle.

Dans le cas d'existence de racine(s), on a les propriétés suivantes, en notant $S$ leur somme et $P$ leur produit :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Ce qui permet, parfois, d'éviter le calcul du disciminant $\Delta$ lorsqu'on connaît déjà une racine. Par exemple, avec le trinôme $5x^2 + 3x - 8$, on devine facilement une racine évidente qui est 1 ; on détermine alors l'autre racine via l'une des deux relations $S = -\frac{b}{a}$ ou $P = \frac{c}{a}$ et on trouve $x_2 = -\frac{8}{5}$.

### Inéquation du second degré

On résout une inéquation du $2^{\text{nd}}$ degré en cherchant les éventuelles racines du trinôme puis on utilise la règle :

*le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est le même que celui de $a$ sauf entre les éventuelles racines*

Par exemple, l'ensemble $S$ des solutions de l'inéquation $2x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$ est $S = ]-\infty\,,\,-\frac{1}{2}] \cup [3\,,\,+\infty[$.

## 1.1 Équations et inéquations

### Exercice 1 – Intersection de deux paraboles

On considère les deux paraboles $P_1$ et $P_2$ données ci-dessous.

On considère les deux fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = x^2 + x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = (x+2)(3-x)$$

**1.** À l'aide du graphique, préciser quelle parabole correspond à $f$ et celle correspondant à $g$.

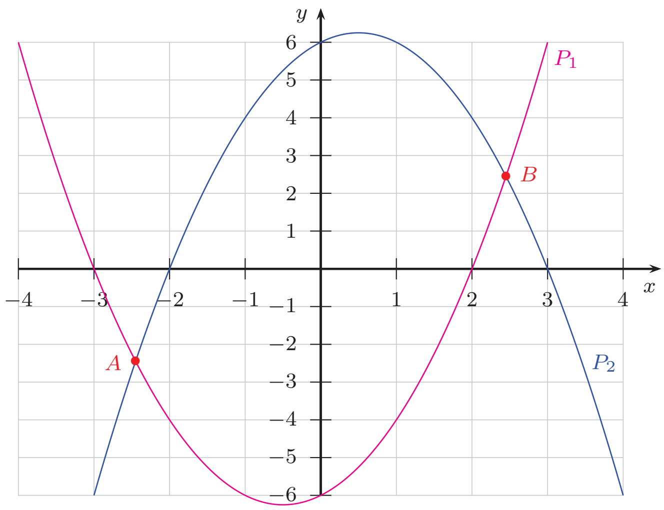
**2.** Déterminer la forme développée de $g$.

**3.** Déterminer la forme factorisée de $f$.

**4.** Déterminer les abscisses des deux points $A$ et $B$ d'intersection entre les paraboles $P_1$ et $P_2$.

**5.** En déduire l'intervalle $I$ sur lequel la parabole $P_2$ est au dessus de la parabole $P_1$.

**6.** Justifier que les points $A$ et $B$ appartiennent à la droite d'équation $y = x$.




## SOLUTION

**1.** La parabole $P_2$ est tournée « vers le bas ». Son coefficient principal $a$ est donc négatif. Ce qui n'est pas le cas de la fonction $f$. Par conséquent, $P_2$ représente $g$ et donc $P_1$ représente $f$.

**2.** Selon la double distributivité, on a :

$$g(x) = 3x - x^2 + 6 - 2x = -x^2 + x + 6$$

**3.** Pour factoriser $f$ on calcule le discriminant $\Delta$ du trinôme $x^2 + x - 6$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$

Comme ce discriminant est strictement positif, le trinôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Puis, via la formule de factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, il vient :

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

On pouvait également conjecturer ces deux racines par lecture graphique puis contrôler, en développant le produit $(x+3)(x-2)$, que l'on récupère bien l'expression algébrique de la fonction $f$.

**4.** Les abscisses des points d'intersection entre les deux paraboles $P_1$ et $P_2$ sont les solutions de l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + x - 6 = -x^2 + x + 6$$

$$2x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 6 = 0$$

Inutile de calculer le discriminant ici car l'équation est facilement factorisable :

$$x^2 - \sqrt{6}^2 = 0$$

$$\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right) = 0$$

On récupère une équation à *produit nul* ainsi :

$$x - \sqrt{6} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{6} = 0$$

$$x = \sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{6}$$

D'où :

$$x_A = -\sqrt{6} \quad ; \quad x_B = \sqrt{6}$$

**5.** La parabole $P_2$ est au dessus de la parabole $P_1$ si et seulement si :

$$g(x) \geqslant f(x)$$

$$-x^2 + x + 6 \geqslant x^2 + x - 6$$

$$2x^2 - 12 \leqslant 0$$

$$x^2 - 6 \leqslant 0$$

On a déjà calculé les racines du trinôme $x^2 - 6$ précédemment.

On rappelle la règle suivante, valable pour toute **fonction polynôme du second degré** :

> Le signe de $ax^2 + bx + c$ est toujours celui du nombre $a$ sauf entre les éventuelles racines $x_1$ et $x_2$.

Dans notre cas, $a$ est positif (il vaut 1), d'où le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{6}$ | | $\sqrt{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $x^2 - 6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Le trinôme $x^2 - 6$ est donc négatif (ou nul) si et seulement si $x \in \left[-\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\right]$.

La parabole $P_2$ est au-dessus de la parabole $P_1$ sur l'intervalle $\left[-\sqrt{6}\,,\sqrt{6}\right]$.

**6.** Il suffit de calculer les ordonnées respectives des points $A$ et $B$ via la fonction $f$ ou $g$ (peu importe) :

$$y_A = f(x_A) = x_A^2 + x_A - 6 = \left(-\sqrt{6}\right)^2 - \sqrt{6} - 6 = 6 - \sqrt{6} - 6 = -\sqrt{6} = x_A$$

De même :

$$y_B = f(x_B) = x_B^2 + x_B - 6 = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \sqrt{6} - 6 = 6 + \sqrt{6} - 6 = \sqrt{6} = x_B$$

Les points $A$ et $B$ ont leur ordonnée qui est égale à leur abscisse.

Ils appartiennent donc bien à la droite d'équation $y = x$.