Matrices et suites matricielles

10.1 Calculs algébriques sur les matrices

RAPPEL DE COURS

Calculs matriciels

- Pour calculer le produit $C = AB$ de deux matrices carrées A et B, on procède de la façon suivante : chaque élément situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne de C s'obtient en additionnant les produits des coefficients de la i-ième ligne de A avec ceux de la j-ième colonne de B.

$$\begin{array}{c|c} & B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 3 & 12 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -4 \\ 3 & 15 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} & C = \begin{pmatrix} -14 & -1 & 44 \\ 45 & 195 & 69 \\ 32 & 75 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Détail du calcul du coefficient c_{33} :

$$c_{33} = 2 \times (-6) + 6 \times 5 + (-3) \times 2 = 12$$

⚠ En général, le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$. Mais il y a des exceptions ; on a par exemple toujours $AI = IA = A$ où I est la matrice *identité* (des 0 partout sauf sur la diagonale principale constituée de 1)

- Une matrice **carrée** A est dite *inversible* s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I$. La matrice B est alors appelée *l'inverse* de A et on la note A^{-1}.

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de taille 2x2 est inversible si et seulement si son *déterminant* $ad - bc$ est **non nul**. On a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Pour les matrices carrées de taille supérieure, on utilise la calculatrice pour calculer l'inverse.

Systèmes linéaires

Tout système linéaire à n inconnues et n équations peut s'écrire $AX = Y$ où A est la matrice carrée constituée des coefficients du système, X la matrice colonne constituée des inconnues et Y la matrice colonne constituée des coefficients du membre de droite des équations. Lorsque la matrice A est inversible, le système linéaire admet alors une unique solution donnée par :

$$X = A^{-1}Y$$

Q 84 - Calculer l'inverse d'une matrice 2x2

[★] [47%]

1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que cette matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

2. Démontrer que la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est égale à son inverse.

1. Le déterminant de la matrice A est égal à $3 \times 3 - 1 \times 8 = 9 - 8 = 1 \neq 0$ donc cette matrice est bien inversible. Notons :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Calculons AA^{-1} :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3x+8z & 3y+8t \\ x+3z & y+3t \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme, par définition, $AA^{-1} = I_2$, on a donc le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+8z &= 1 \\ 3y+8t &= 0 \\ x+3z &= 0 \\ y+3t &= 1 \end{cases}$$

On peut scinder ce système en deux systèmes de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3x+8z &= 1 \\ x+3z &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3y+8t &= 0 \\ y+3t &= 1 \end{cases}$$

On peut résoudre le premier par substitution (ou matriciellement !) en remarquant que la deuxième équation donne $x = -3z$ puis en remplaçant dans la première équation, il vient $-9z + 8z = 1$ d'où $z = -1$ puis $x = 3$. De même, le second système donne $y = 1 - 3t$ grâce à la deuxième équation puis en remplaçant dans la première : $3(1-3t) + 8t = 0$ d'où $t = 3$ puis $y = -8$.

En conclusion :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Notons que l'on peut obtenir directement ce résultat si on connaît le résultat de cours suivant :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Il suffit de remarquer que :

$$B \times B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Cela prouve que $B = B^{-1}$.

La matrice B est bien égale à son inverse.

. . . .

Q 85 - Calculer l'inverse d'une matrice 3x3 par factorisation [★★] [37%]

1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

1. Calculons A^2 :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Par ailleurs :

$$3A - 2I_3 = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$A^2 - 3A = -2I_3$$

Puis, on factorise, à gauche, par A :

$$A(A - 3I_3) = -2I_3$$

Puis, on divise par -2 :

$$A\left(\frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A\right) = I_3$$

Il existe donc une matrice B telle que $AB = I_3$ ce qui prouve que A est inversible avec $A^{-1} = B$:

$$A^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

. . . .

Q 86 - Résoudre un système linéaire matriciellement

[★] [34%]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les trois plans définis ci-dessous par leurs équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : 3x - 5y + 2z - 7 = 0$$

$$P_2 : -4x + 3y + 3z - 23 = 0$$

$$P_3 : 5x + 4y - 2z + 1 = 0$$

On admet que ces trois plans se coupent en un unique point I.

Déterminer les coordonnées de I.

Il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y+2z & = & 7 \\ -4x+3y+3z & = & 23 \\ 5x+4y-2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Le système s'écrit matriciellement $AX = Y$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 7 \\ 23 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Avec la calculatrice, on effectue alors $A^{-1}Y$ pour obtenir X :

$$X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Les trois plans se coupent donc en le point $I(1\,,2\,,7)$.

. . . .

10.2 Suites de matrices

RAPPEL DE COURS

Puissances de matrices

Soit A une matrice carrée.

Par définition A^0 est égal à la matrice identité I.

Pour déterminer une expression de A^n en fonction de n, on peut procéder de plusieurs façons :

- calculer A^2, A^3,... puis conjecturer une expression de A^n en fonction de n que l'on démontre ensuite par récurrence ;
- utiliser une matrice dite de *passage* P et une matrice *diagonale* D (données dans l'énoncé) telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

On dit alors que la matrice A est *diagonalisable* et on en déduit, par récurrence que :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Comme la matrice D est diagonale, la matrice D^n est facile à exprimer (on élève les coefficients diagonaux à la puissance n) puis on en déduit une expression de A^n en fonction de n.

Q 87 - Suite géométrique matricielle [★★] [78%]

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que :

$$U_{n+1} = AU_n$$

3. Calculer A^{20} à l'aide de la calculatrice. En déduire u_{20}.

1. On a :

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$$

$$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$$

$$u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$$

2. Calculons AU_n :

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

On a donc bien $U_{n+1} = AU_n$.

3. D'après ce qui précède, la suite (U_n) est géométrique de raison la matrice A. On a donc, pour tout n :

$$U_n = A^nU_0$$

La calculatrice donne :

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 4181 & 6765 \\ 6765 & 10946 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$U_{20} = A^{20}U_0 = \begin{pmatrix} 4181 & 6765 \\ 6765 & 10946 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6765 \\ 10946 \end{pmatrix}$$

Donc $u_{20} = 6765$.

. . . .

Q 88 - Suite géométrique matricielle et suites couplées

[⋆ ⋆ ⋆] [71%]

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Démontrer que la suite (X_n) est géométrique puis en déduire que l'on a :

$$X_n = A^n X_0$$

2. On donne les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On admet que P est inversible. Avec la calculatrice, préciser sa matrice inverse P^{-1} puis vérifier que :

$$A = PDP^{-1}$$

3. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

4. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n puis étudier la convergence des deux suites (u_n) et (v_n).

1. Calculons AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Ce résultat étant valable pour tout entier naturel n, on en déduit que la suite (X_n) est géométrique de raison la matrice A. Par conséquent, on a bien :

$$X_n = A^n X_0$$

2. La calculatrice donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

On alors :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A$$