77 questions « type-bac »

Série **S** - Mathématiques

Enseignement spécifique

(anciennement obligatoire)

Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Félicitations !

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;
3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;
5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

Table des matières

BAC S - THÈME 1

Suites et récurrence

1.1 Récurrence

RAPPEL DE COURS

Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$.

SI :

- la propriété $\mathcal{P}$ est INITIALISÉE à un certain rang n_0, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}$$ [1]

- la propriété $\mathcal{P}$ est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0, c'est-à-dire :

$$\text{pour } n \geqslant n_0, \left(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\right)$$

ALORS : La propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout rang n plus grand que n_0.

En pratique, on rédige une récurrence en suivant les quatre étapes ci-dessous :

1. on énonce la propriété de travail $\mathcal{P}(n)$;

2. on vérifie l'initialisation en examinant si l'on a $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$ selon le cas) ;

3. on vérifie l'hérédité. Pour cela, on suppose $\mathcal{P}(n)$ **pour un certain entier** n (vérifiant $n \geqslant n_0$) et on en déduit la propriété au rang suivant, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$;

4. on conclut en affirmant que l'on a ainsi démontré que, pour tout entier n (vérifiant $n \geqslant n_0$), on a $\mathcal{P}(n)$.

Q 1 - Démontrer une conjecture

[$\star$] [44%]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

1. Calculons les premiers termes afin de se faire une « idée » :

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 3$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 7$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 15$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 31$$

1. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » !?

On remarque qu'en ajoutant 1 à chaque terme, on obtient les puissances successives de 2.

Nous pouvons donc conjecturer [2] que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2^n - 1$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$$

- Puisqu'on peut écrire $u_0 = 2^0 - 1$, on a $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n - 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n, ce qui démontre la conjecture.

. . . .

Q 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme [★★] [32%]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée $(\star)$, valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln\left(A^2\right) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2\ln(A)$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln\left(A^0\right) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant $(\star)$:

$$\ln\left(A^{n+1}\right) = \ln\left(A^n \times A\right) = \ln\left(A^n\right) + \ln(A) = n\ln(A) + \ln(A) = (n+1)\ln(A)$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Attention, une conjecture n'est pas une preuve (ni une affirmation forcément vraie, certaines conjectures se révèlent parfois fausses. . .). Ce n'est que l'énoncé d'une propriété resultant d'un certain nombre d'observations.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

3. Dans cette question, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente car n était un entier. Cependant, à l'aide de la propriété $(\star)$, on peut écrire :

$$\ln(A) = \ln\big(\sqrt{A} \times \sqrt{A}\big) = \ln\big(\sqrt{A}\big) + \ln\big(\sqrt{A}\big) = 2\ln\big(\sqrt{A}\big)$$

D'où, *via* une division par 2 :

$$\ln\big(\sqrt{A}\big) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

. . . .

Q 3 - Une suite stationnaire

[★★] [27%]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1$.

1. On a :

$$u_1 = 2u_0^2 + 3u_0 - 4 = 2 \times \frac{25}{4} + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 4 = \frac{25}{2} - \frac{15}{2} - \frac{8}{2} = 1$$

$$u_2 = 2u_1^2 + 3u_1 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

$$u_3 = 2u_2^2 + 3u_2 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

Cette suite semble se stabiliser sur la valeur 1 dès que $n \geqslant 1$. (On dit d'une telle suite qu'elle est *stationnaire*)

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 1$$

- Puisqu'on a $u_1 = 1$, on a $\mathcal{P}(1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 1$).

  ⚠ Noter que, dans cet exemple, on fait démarrer la récurrence à $n = 1$.
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 1$) et héréditaire (pour $n \geqslant 1$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

. . . .

Q 4 - Comparaison entre n^2 et 2^n

[★★★] [18%]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier que l'on précisera, on a :

$$n^2 \leqslant 2^n$$

Notons $\mathcal{P}$, la propriété définie par :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$$