

Graphes

À QUOI ÇA SERT ?

Comment fonctionne un GPS pour déterminer le plus court chemin (en temps ou en distance) sur un réseau routier ? Comment calculer le nombre d'itinéraires entre un point A et un point B sur un réseau routier ? Un facteur peut-il faire sa tournée sans emprunter deux fois la même rue ? Toutes ces questions peuvent se résoudre à l'aide de la *théorie des graphes*. Un graphe est un réseau de points (ou sommets) reliés ou non (par des arêtes). Dans ce chapitre, on étudie donc les propriétés des graphes et on met en place quelques outils (notamment des matrices) qui permettent de répondre à ces questions.

Les arêtes d'un graphe peuvent contenir des informations (par exemple des distances ou des temps de trajet). Elles peuvent être orientées ou non selon que l'on peut les emprunter uniquement dans un sens ou dans les deux sens. Il existe également des *graphes probabilistes* sur lesquels les arêtes sont pondérées par des probabilités. De tels graphes permettent, via des matrices de probabilités, de faire des calculs prévisionnels tels que l'évolution d'une maladie par exemple.

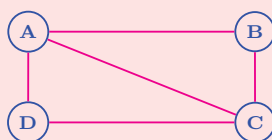
7.1 Généralités

RAPPEL DE COURS

Vocabulaire général sur les graphes

- Un *graphe* est un réseau de sommets dont certains sont reliés par des arêtes.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents*.
- L'*ordre* d'un graphe, c'est le nombre total de sommets.
- Le *degré* d'un sommet, c'est le nombre d'arêtes reliées à ce sommet.
- Un graphe est *complet* lorsque chaque sommet est relié à tous les autres.

Exemple :



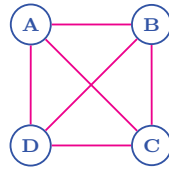
L'ordre de ce graphe est 4. Le degré de A est 3, celui de D est 2. Les sommets A et B sont adjacents mais pas les sommets B et D . Le graphe n'est pas complet mais si on rajoute l'arête $B - D$, il le devient.

Q 33 - Graphes complets

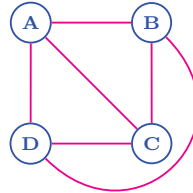
[★] [87%]

1. Dessiner un graphe complet d'ordre 4. Peut-on le dessiner afin qu'aucune arête ne se croise ?
2. Dessiner un graphe complet d'ordre 5. Combien contient-il d'arêtes ?
3. Déterminer le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre $n \geq 2$.

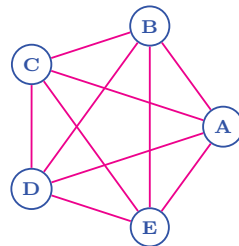
1. Pour réaliser un graphe complet d'ordre 4, il suffit de penser à un « carré » avec ses diagonales :



Il est possible d'éviter que des arêtes se croisent :



2. Voici un graphe complet d'ordre 5 :



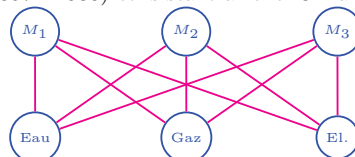
Ce graphe contient 10 arêtes. Cette fois-ci, il n'est plus possible d'éviter le croisement d'arêtes⁽¹⁾.

3. Dans un graphe complet, chaque sommet doit être relié à tous les autres. S'il y a n sommets, alors le degré de chaque sommet est donc $n - 1$. La somme S des degrés de tous les sommets est donc $S = n(n - 1)$. Or, une arête possède deux extrémités. Lorsqu'on ajoute une arête à un graphe, cela augmente la somme des degrés de 2. Le nombre total d'arêtes est donc la moitié de S , à savoir⁽²⁾ :

$$\frac{n(n - 1)}{2}$$

En particulier, lorsque $n = 5$, on retrouve bien 10 arêtes.

1. Un tel graphe est dit *non planaire*. Celui-ci, d'ordre 5, est noté K_5 . Un autre célèbre graphe non planaire est le $K_{3,3}$ qui apparaît dans le problème du mathématicien Dudeney (1857 - 1930) consistant à relier 3 maisons à 3 bornes, l'eau, le gaz et l'électricité :



2. C'est aussi le nombre de façons de choisir 2 objets parmi n , à savoir $\binom{n}{2}$ qui vaut $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

7.2 Chaînes et cycles

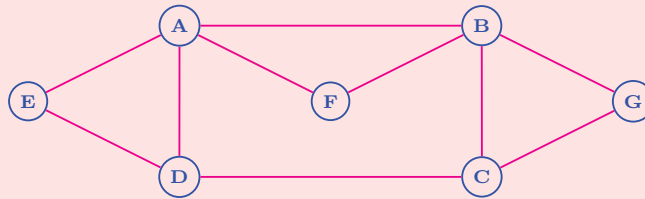
RAPPEL DE COURS

Chaînes et cycles

- Une *chaîne* est une liste de sommets adjacents.
- Une chaîne est dite *fermée* lorsque ses extrémités sont identiques.
- Un *cycle* est une chaîne fermée composée d'arêtes distinctes.
- Une chaîne est dite *eulérienne* lorsqu'elle contient une et une seule fois chaque arête du graphe.
- Un cycle est dite *eulérien* lorsqu'il contient une et une seule fois chaque arête du graphe.

Remarque : une chaîne ou un cycle eulérien(ne) peut passer plusieurs fois par un même sommet.

Exemple :



$A - F - B - G$ est une chaîne (non fermée) mais $A - F - C - G$ n'en est pas une car F et C ne sont pas reliés. $A - F - B - A - D - C - B - A$ est une chaîne fermée mais ce n'est pas un cycle car l'arête $B - A$ est répétée deux fois. $A - E - D - A - F - B - A$ est un cycle mais il n'est pas eulérien.

Théorème d'Euler

- Si un graphe connexe⁽³⁾ n'a que des sommets de degré pair, alors il admet un cycle eulérien.
- Si un graphe connexe n'a que deux sommets de degré impair, alors il admet une chaîne eulérienne.

Exemple : sur le graphe précédent, il n'existe pas de cycle eulérien car les sommets D et C sont de degré impair.

Il existe, cependant, une chaîne eulérienne, par exemple $D - E - A - B - F - A - D - C - B - G - C$. Notons que, dans ce cas, les extrémités de la chaîne eulérienne sont nécessairement les deux sommets de degré impair.

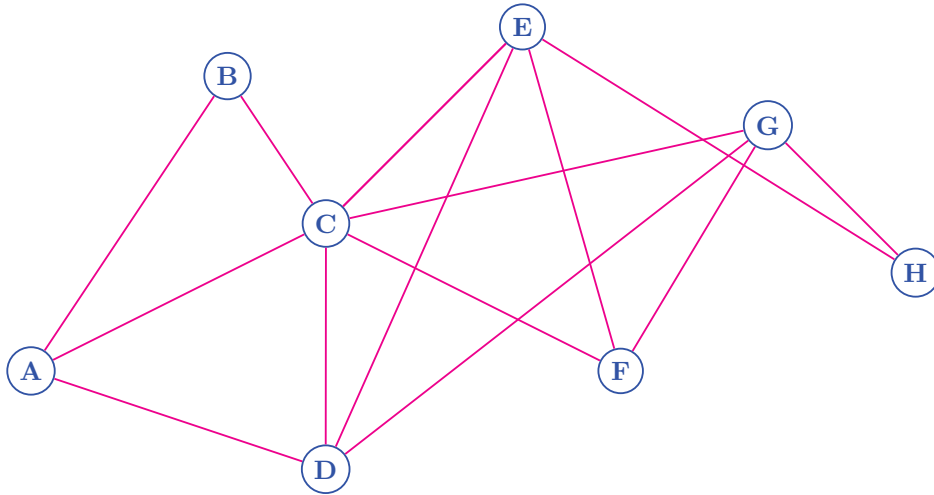
Q 34 - Chaînes et cycles eulériens

[★★] [85%]

Le graphe ci-dessous représente le réseau d'une compagnie aérienne. Chaque sommet correspond à une ville. Chaque arête correspond à une liaison aérienne en service.

1. Donner le degré de chaque sommet du graphe.
2. Vérifier que le graphe est connexe.
3. Un responsable qualité de la compagnie souhaite emprunter une et une seule fois chaque liaison afin de tester, pour chacune d'entre-elles, si elle répond aux normes. Une tel itinéraire est-il possible? (Justifier). Si oui, proposer un itinéraire possible.
4. En fait, le responsable qualité habite dans la ville A . Il souhaite que son itinéraire parte de A et se termine en A (toujours en empruntant une et une seule fois chaque liaison). Par ailleurs, la compagnie possède le budget pour ouvrir une liaison supplémentaire. Quelle doit-être cette liaison pour satisfaire le souhait du responsable qualité?

3. Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques du graphe peuvent être reliés par une chaîne.



1. On peut présenter les degrés respectifs de chaque sommet à l'aide d'un tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	2	6	4	4	3	4	2

2. Pour prouver que le graphe est connexe, il suffit de trouver une chaîne qui passe par tous les sommets. Par exemple :

$$A - B - C - D - E - F - G - H$$

3. Un tel itinéraire est possible lorsque le graphe admet une chaîne eulérienne. Dans notre cas, il n'y a que deux sommets de degré impair (à savoir A et F) donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne et le responsable qualité peut donc réaliser un tel itinéraire. Les extrémités de la chaîne seront nécessairement les sommets de degré impair. Par exemple :

$$A - B - C - A - D - C - E - D - G - F - C - G - H - E - F$$

Notons que la longueur de la chaîne correspond au nombre d'arêtes du graphe.

4. Cette fois-ci, pour qu'un tel itinéraire soit possible, le graphe doit admettre un cycle eulérien. D'après le théorème d'Euler, un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair. Ce n'est pas le cas dans la configuration d'origine. La nouvelle liaison ouverte doit donc être telle qu'il n'y ait plus de sommets de degré impair. Il faut donc joindre le sommet A au sommet F . De cette manière, le souhait du responsable qualité est réalisable.

