42 questions « type-bac »

Série **ES** - Mathématiques

Enseignement obligatoire

Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Bonne lecture et bon travail !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;

4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

Table des matières

À QUOI ÇA SERT ?

Les suites permettent de modéliser l'évolution de certains phénomènes : par exemple l'évolution d'un capital placé au cours des années (formule $C_n = C_0(1+i)^n$ où i est le taux d'intérêt), ou encore l'évolution d'une probabilité p_n par rapport à certaines unités de temps, ou encore traduire certaines propriétés mathématiques : la suite des entiers impairs $(2n-1)$ ou $(2n+1)$, des carrés (n^2) des puissances de 2 à savoir (2^n), etc. On utilise pour cela la notation indicielle (avec la lettre u ou une autre, peu importe) : u_0 est généralement la valeur initiale (parfois u_1) et u_n désigne la valeur à la n-ième étape du processus (ou terme de rang n). Le successeur du terme u_n est alors noté u_{n+1}. Et le successeur de u_{n+1} est alors u_{n+2}. Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ puis pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Chaque terme s'obtient en faisant la somme des deux précédents.
On obtient alors $u_2 = u_1 + u_0 = 1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$ etc.
Contrairement aux fonctions pour lesquelles la variable x est un réel, dans les suites, la variable n est un entier naturel. Une suite est en fait une fonction définie sur $\mathbb{N}$. La plupart des suites sont « quelconques » mais certaines ont des propriétés spécifiques :
◦ suites arithmétiques : on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r : $u_{n+1} = u_n + r$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 + nr$ (on passe de u_0 à u_n en ajoutant n fois la raison r) ;
◦ suites géométriques : on passe de chaque terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité q : $u_{n+1} = u_n \times q$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 \times q^n$ (on passe de u_0 à u_n en multipliant n fois par la raison q) ;
◦ suites croissantes : chaque terme est inférieur au suivant : $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$;
◦ etc.
Comme on l'a vu ci-dessus, certaines suites sont définies de façon « explicite » comme par exemple $u_n = n^2 + 3$. Dans ce cas, on peut immédiatement calculer n'importe quel terme de la suite (par exemple $u_5 = 28$) mais on ne saisit pas forcément le lien entre deux termes successifs. D'autres suites sont définies par « récurrence » (de proche en proche) comme par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ (on donne la valeur d'un terme initial puis une formule donnant chaque terme qui se définit à partir du (ou des) précédent(s)). Dans ce cas, on voit le *lien* entre les termes (on passe d'un terme au suivant en ajoutant les entiers impairs successifs) mais on ne peut pas calculer immédiatement n'importe quel terme de la suite. Souvent, dans les exercices, on doit passer d'une écriture à l'autre. Par exemple en partant de la formule explicite $u_n = n^2 + 3$ on peut chercher une relation de récurrence. Pour cela on ré-écrit la formule en remplaçant u_n par u_{n+1} :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 = u_n + 2n + 1$$

0.1 Suites géométriques

RAPPEL DE COURS

Suite géométrique

Une suite (u_n) est dite *géométrique* lorsqu'on passe de chacun de ses termes au suivant en multipliant toujours par la même quantité q, appelée *raison*. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Dans le cas d'une suite géométrique, on peut alors exprimer n'importe quel terme u_n en fonction du rang n *via* la relation :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Variante : $$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Et plus généralement encore : $$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

La somme des $n+1$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule suivante :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0\left(1 - q^{n+1}\right)}{1 - q}$$

En particulier (lorsque $u_0 = 1$) :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

⚠ Les formules de somme ci-dessus sont valables lorsque la sommation s'effectue à partir de u_0 et jusqu'à u_n (ce qui fait $n+1$ termes). Dans les autres cas, on recommande la formule suivante :

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \frac{P\left(1 - q^N\right)}{1 - q}$$

où P est le premier terme de la somme et N le nombre de termes de la somme (ici $N = n - k + 1$).

Q 1 - Suite géométrique et pourcentages

[⋆] [40%]

Un étudiant paye un loyer mensuel de 400 euros pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%. On note u_n le loyer mensuel après n années, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1, c'est-à-dire le montant du loyer mensuel après une année.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Après 6 années, le montant du loyer mensuel a augmenté de :

☐ 42% ☐ 50% ☐ 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

1. Une augmentation de 7% se traduit par une multiplication par $\left(1 + \frac{7}{100}\right) = 1{,}07$. Ainsi :

$$u_1 = 1{,}07 \times u_0 = 428$$

Après une année, le montant du loyer mensuel de cet étudiant est de 428 euros.