Q 58 - Équation diophantienne

[⋆⋆] [37%]

On considère l'équation (E) suivante dont les inconnues x et y sont dans $\mathbb{Z}$:

$$(E) : 7x - 5y = 1$$

1. Vérifier que le couple $(x\,,y) = (3\,,4)$ est solution de (E).

2. Démontrer qu'un couple $(x\,,y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

3. En déduire que les solutions de (E) sont les couples $(x\,,y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x &= 5k+3 \\ y &= 7k+4 \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

1. On a $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc le couple $(x\,,y) = (3\,,4)$ est bien solution de (E).

   Remarque 1 :

   Cette solution particulière $(x\,,y) = (3\,,4)$ n'est pas unique. Il en existe une infinité d'autres comme par exemple $(x\,,y) = (-2\,,-3)$. En effet :

   $$7 \times (-2) - 5 \times (-3) = -14 + 15 = 1$$

   Remarque 2 :

   Si une solution particulière n'est pas donnée dans l'énoncé, on peut en retrouver *via* l'algorithme d'Euclide étendu en procédant dans un premier temps aux divisions euclidiennes successives suivantes :

   $$7 = 5 \times 1 + 2$$

   $$5 = 2 \times 2 + 1$$

   $$2 = 2 \times 1 + 0$$

   Dans l'avant dernière égalité, on a un reste égal à 1 (qui est le PGCD de 5 et 7) ce qui nous permet d'écrire :

   $$5 - 2 \times 2 = 1$$

   Puis on remplace un des 2 en utilisant l'égalité précédente (ici simplement $2 = 7 - 5$) :

   $$5 - 2 \times (7 - 5) = 1$$

   $$7 \times (-2) + 5 \times (-3) = 1$$

   On retrouve la solution particulière $(x\,,y) = (-2\,,-3)$:

2. Soit $(x\,,y)$ un couple solution de (E) donc :

   $$7x - 5y = 1 \quad (\star)$$

   Par ailleurs, on a vu à la question précédente que :

   $$7 \times 3 - 5 \times 4 = 1 \quad (\star\star)$$

   En retranchant membre à membre les deux égalité précédentes, c'est-à-dire $(\star) - (\star\star)$, on obtient :

   $$7(x-3) - 5(y-4) = 1 - 1 = 0$$

   D'où :

   $$7(x-3) = 5(y-4)$$

Réciproquement, si on suppose qu'un couple $(x\,,y)$ d'entiers relatifs vérifie $7(x-3) = 5(y-4)$ alors en développant, on obtient :

$$7x - 21 = 5y - 20$$

$$7x - 5y = 1$$

Donc $(x\,,y)$ est solution de (E).

3. Utilisons le théorème de Gauss rappelé ci-dessous :

Si a et b sont premiers entre eux et si a divise le produit bc alors a divise c.

En ce qui nous concerne, on peut dire que les entiers 5 et 7 sont premiers entre eux. Par ailleurs, la relation $7(x-3) = 5(y-4)$ montre que 5 divise le produit $7(x-3)$. Par conséquent, le nombre 5 divise $x-3$. Il existe donc un entier relatif k tel que :

$$x - 3 = 5k$$

$$x = 5k + 3$$

On en déduit, en remplaçant dans la relation $7(x-3) = 5(y-4)$:

$$7 \times 5k = 5(y-4)$$

$$7k = y - 4$$

$$y = 7k + 4$$

On a donc bien :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5k+3 \\ y & = & 7k+4 \end{array}\right. \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Réciproquement, si on suppose que l'on a les relations ci-dessus alors :

$$7x - 5y = 7(5k+3) - 5(7k+4) = 35k + 21 - 35k - 20 = 1$$

Donc $(x\,,y)$ est solution de (E).
En conclusion, les solutions de (E) sont bien les couples $(x\,,y)$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5k+3 \\ y & = & 7k+4 \end{array}\right. \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

....

9.3 Congruences

Q 59 - Résolution d'une équation modulo 11

[★★] [22%]

Résoudre l'équation $x^2 \equiv 5\,[11]$.

http://question-type-bac.fr

Pour ce type de question, on réalise le tableau des carrés modulo 11 :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

On constate qu'il y a deux solutions modulo 11 :

$$x \equiv 4\,[11] \;\text{ ou }\; x \equiv 7\,[11]$$