Arithmétique

9.1 Divisibilité - Division euclidienne

Q 57 - Divisibilité et somme

[★★] [14%]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, en fonction de n, la somme suivante :

$$S_n = 1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n + 14$ est un multiple de 5.

1. Il s'agit de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 6$. On a donc :

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-6^n}{1-6} = \frac{6^n - 1}{5}$$

2. Si $n = 0$ alors $6^n + 14 = 6^0 + 14 = 1 + 14 = 15$ et 15 est bien un multiple de 5.

Supposons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on en déduit que $6^n - 1$ est un multiple de 5 (puisqu'on peut écrire $6^n - 1 = 5S_n$ et que S_n est un entier).

Il suffit maintenant d'écrire que $6^n + 14 = \left(6^n - 1\right) + 15$.

On vient de voir que 5 divise $6^n - 1$. Par ailleurs, 5 divise 15. Donc 5 divise la somme $\left(6^n - 1\right) + 15$ à savoir $6^n + 14$. En conclusion, $6^n + 14$ est toujours un multiple de 5.

Remarque

On peut retrouver ce résultat en utilisant les congruences :

$$6 \equiv 1\,[5]$$

Par élévation à la puissance n pour $n \in \mathbb{N}$:

$$6^n \equiv 1^n\,[5]$$

C'est-à-dire :

$$6^n \equiv 1\,[5]$$

D'où :

$$6^n + 14 \equiv 15 \equiv 0\,[5]$$

Ce qui signifie bien que $6^n + 14$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

....

Q 58 - VRAI ou FAUX sur la divisibilité

[★★] [19%]

Les nombres a, b et n ci-dessous sont des entiers naturels non nuls.

1. Si n divise $a + b$ et ab alors n divise a.

2. $n(n+1)$ est toujours un entier pair.

3. Il existe des entiers a et b tels que $3a + 12b = 22$.

4. Si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n alors $a - b$ est un multiple de n.

5. n et n^2 ont la même parité.

1. C'est FAUX. Voici un contre-exemple : 4 divise $2+6$ et 4 divise 2×6 mais pourtant 4 ne divise pas 2.

2. C'est VRAI. En effet, n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, dont l'un des deux est pair. Par conséquent le produit $n(n+1)$ est également pair. On peut également faire une preuve par récurrence :

- c'est vrai pour $n=0$ car $0 \times 1 = 0$ ce qui est un nombre pair ;
- supposons $n(n+1)$ pair autrement dit n^2+n pair. Examinons $(n+1)(n+2)$ qui s'écrit $n^2+3n+2 = n^2+n+2n+2$. On constate que n^2+n est pair par hypothèse de récurrence. Mais $2n+2$ est également pair. Par conséquent, la somme $n^2+n+2n+2$ est paire. Donc $(n+1)(n+2)$ est un nombre pair. La propriété est ainsi initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout n.

3. C'est FAUX. En effet, $3a+12b$ peut s'écrire $3(a+4b)$. On voit ainsi qu'il s'agit d'un multiple de 3. Or, 22 n'est pas un multiple de 3. Il ne peut donc pas y avoir égalité entre $3a+12b$ et 22. (Lorsque a et b sont des entiers évidemment, sinon on peut prendre $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{7}{4}$)

4. C'est VRAI. En effet, d'une part il existe un unique couple $(q\,,r)$ tel que :

$$a = nq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < n$$

D'autre part, il existe un unique couple $(q'\,,r)$ tel que :

$$b = nq' + r \text{ avec } 0 \leqslant r < n$$

On en déduit que :

$$a - b = n(q - q')$$

Ce qui signifie bien que $a-b$ est un multiple de n.

5. C'est VRAI. On peut raisonner par disjonction des cas :

- Si n est pair, il peut s'écrire $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ce qui est un nombre pair ;
- Si n est impair, il peut s'écrire $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$. Or $4k^2+4k$ est un nombre pair donc $4k^2+4k+1$ est un nombre impair.

En conclusion, n est n^2 ont bien la même parité.

....

Q 59 - Utilisation d'une division euclidienne

[★★★] [15%]

Dans cet exercice, n désigne un entier relatif.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 25 par 4 ? Et de 36 par 4 ?
Démontrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est toujours 0 ou 1.

2. Démontrer que le cube de tout entier relatif n est de la forme $9k$, $9k+1$ ou $9k+8$.

1. On a $25 = 4 \times 6 + 1$ donc le reste de la division euclidienne de 25 par 4 est 1.
On a $36 = 4 \times 9 + 0$ donc le reste de la division euclidienne de 36 par 4 est 0.
Procédons par disjonction des cas :

- si n est pair, alors il s'écrit $n = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $n^2 = 4k^2 = 4 \times k^2 + 0$ ce qui signifie que le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 0 ;
- si n est impair, alors il s'écrit $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $n^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$ donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est 1.

Bilan : le reste de la division euclidienne de n^2 par 4 est toujours 0 ou 1.

2. Effectuons la division euclidienne de n par 3 :

$$n = 3q + r \text{ avec } 0 \leqslant r < 3$$