BAC S - THÈME 9

Arithmétique

9.1 Divisibilité - Division euclidienne

À QUOI ÇA SERT ?

Si l'on doit partager 26 objets entre 3 personnes, ça ne va pas tomber juste : on dit alors que 26 n'est pas divisible par 3. Il restera donc quelques objets, mais combien exactement ? Pour le savoir, on effectue la *division euclidienne* de 26 par 3. Pour cela on cherche le plus grand multiple de 3 inférieur à 26, à savoir 24. Chacune des 3 personnes recevra donc 8 objets et il en restera 2. On écrit $26 = 3 \times 8 + 2$.
Les mathématiciens ont vite réalisé que cette division euclidienne avait de nombreuses applications : recherche du pgcd de 2 nombres, problèmes de calendriers, cryptographie, etc.

RAPPEL DE COURS

Division euclidienne et divisibilité

Soient a un entier relatif et b un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers $(q\,,r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$$

Vocabulaire : le nombre a s'appelle le *dividende*, le nombre b le *pseudo-diviseur* (il n'est diviseur parfait que lorsque $r = 0$...), le nombre q le *quotient* et le nombre r le *reste*.

Exemple : la division euclidienne du nombre $a = 46$ par le nombre $b = 7$ donne pour quotient $q = 6$ et reste $r = 4$ car $46 = 7 \times 6 + 4$.

⚠ Attention, si on change le réel a en son opposé, le quotient et le reste ne vont pas se changer en leur opposé ! Par exemple, la division euclidienne de $a = -46$ par $b = 7$ ne peut pas être $-46 = 7 \times (-6) + (-4)$ car le reste d'une division euclidienne est nécessairement positif. Il faut donc écrire $-46 = 7 \times (-7) + 3$.

En langage Python, le quotient q de a par b est obtenu en écrivant $a//b$ et le reste r en écrivant $a\%b$.

Cas particulier : lorsque le reste r d'une division euclidienne est nul, on dit alors que le nombre b *divise* le nombre a. On dit aussi que le nombre a est un *multiple* du nombre b.

Propriétés de la divisibilité : (a, b et d désignent des entiers)

- Si d divise a alors d divise tout multiple de a.
- Si d divise a et b alors d divise la somme $a + b$ ainsi que la différence $a - b$
- En généralisant les deux propriétés précédentes, on peut dire que si d divise a et b alors d divise toute *combinaison linéaire* de a et b, cela signifie que d divise $au + bv$ où u et v sont des entiers relatifs.
- Si d divise b et b divise a alors d divise a (transitivité).

On peut étendre le concept division euclidienne à $\mathbb{Z}$, dans ce sens qu'on autorise désormais que b soit un entier relatif non nul. Dans ce cas, il faut nuancer la condition sur le reste en écrivant qu'il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < |b|$$

Par exemple, la division euclidenne de $a = 25$ par $b = -7$ donne $25 = (-7) \times (-3) + 4$ et on a bien $0 \leqslant r < |b|$.

Q 57 - Divisibilité et somme

[★★] [14%]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, en fonction de n, la somme suivante :

$$S_n = 1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n + 14$ est un multiple de 5.

http://question-type-bac.fr

1. Il s'agit de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 6$. On a donc :

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-6^n}{1-6} = \frac{6^n-1}{5}$$

2. Si $n = 0$ alors $6^n + 14 = 6^0 + 14 = 1 + 14 = 15$ et 15 est bien un multiple de 5.

Supposons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on en déduit que $6^n - 1$ est un multiple de 5 (puisqu'on peut écrire $6^n - 1 = 5S_n$ et que S_n est un entier).

Il suffit maintenant d'écrire que $6^n + 14 = \left(6^n - 1\right) + 15$.

On vient de voir que 5 divise $6^n - 1$. Par ailleurs, 5 divise 15. Donc 5 divise la somme $\left(6^n - 1\right) + 15$ à savoir $6^n + 14$. En conclusion, $6^n + 14$ est toujours un multiple de 5.

Remarque

On peut retrouver ce résultat en utilisant les congruences :

$$6 \equiv 1\,[5]$$

Par élévation à la puissance n pour $n \in \mathbb{N}$:

$$6^n \equiv 1^n\,[5]$$

C'est-à-dire :

$$6^n \equiv 1\,[5]$$

D'où :

$$6^n + 14 \equiv 15 \equiv 0\,[5]$$

Ce qui signifie bien que $6^n + 14$ est un multiple de 5 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

....

Q 58 - VRAI ou FAUX sur la divisibilité

[★★] [19%]

Les nombres a, b et n ci-dessous sont des entiers naturels non nuls.

1. Si n divise $a + b$ et ab alors n divise a.

2. $n(n+1)$ est toujours un entier pair.

3. Il existe des entiers a et b tels que $3a + 12b = 22$.

4. Si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n alors $a - b$ est un multiple de n.

5. n et n^2 ont la même parité.

http://question-type-bac.fr

1. C'est FAUX. Voici un contre-exemple : 4 divise $2 + 6$ et 4 divise 2×6 mais pourtant 4 ne divise pas 2.

2. C'est VRAI. En effet, n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs, dont l'un des deux est pair. Par conséquent le produit $n(n + 1)$ est également pair. On peut également faire une preuve par récurrence :

- c'est vrai pour $n = 0$ car $0 \times 1 = 0$ ce qui est un nombre pair ;
- supposons $n(n+1)$ pair autrement dit n^2+n pair. Examinons $(n+1)(n+2)$ qui s'écrit $n^2+3n+2 = n^2+n+2n+2$. On constate que $n^2 + n$ est pair par hypothèse de récurrence. Mais $2n + 2$ est également pair. Par conséquent,