10.2 Suites de matrices

RAPPEL DE COURS

Puissances de matrices

Soit A une matrice carrée.

Par définition A^0 est égal à la matrice identité I.

Pour déterminer une expression de A^n en fonction de n, on peut procéder de plusieurs façons :

- calculer A^2, A^3,... puis conjecturer une expression de A^n en fonction de n que l'on démontre ensuite par récurrence ;
- utiliser une matrice dite de *passage* P et une matrice *diagonale* D (données dans l'énoncé) telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

On dit alors que la matrice A est *diagonalisable* et on en déduit, par récurrence que :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Comme la matrice D est diagonale, la matrice D^n est facile à exprimer (on élève les coefficients diagonaux à la puissance n) puis on en déduit une expression de A^n en fonction de n.

Q 66 - Suite géométrique matricielle

[★★] [78%]

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que :

$$U_{n+1} = AU_n$$

3. Calculer A^{20} à l'aide de la calculatrice. En déduire u_{20}.

http://question-type-bac.fr

1. On a :

$$u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$$

$$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$$

$$u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$$

2. Calculons AU_n :

$$AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$$

On a donc bien $U_{n+1} = AU_n$.

3. D'après ce qui précède, la suite (U_n) est géométrique de raison la matrice A. On a donc, pour tout n :

$$U_n = A^nU_0$$

La calculatrice donne :

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 4181 & 6765 \\ 6765 & 10946 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$U_{20} = A^{20}U_0 = \begin{pmatrix} 4181 & 6765 \\ 6765 & 10946 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6765 \\ 10946 \end{pmatrix}$$

Donc $u_{20} = 6765$.

. . . .

Q 67 - Suite géométrique matricielle et suites couplées

[$\star\star\star$] [71%]

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Démontrer que la suite (X_n) est géométrique puis en déduire que l'on a :

$$X_n = A^n X_0$$

2. On donne les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

On admet que P est inversible. Avec la calculatrice, préciser sa matrice inverse P^{-1} puis vérifier que :

$$A = PDP^{-1}$$

3. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

4. En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n puis étudier la convergence des deux suites (u_n) et (v_n).

1. Calculons AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Ce résultat étant valable pour tout entier naturel n, on en déduit que la suite (X_n) est géométrique de raison la matrice A. Par conséquent, on a bien :

$$X_n = A^n X_0$$

2. La calculatrice donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

On alors :

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A$$

3. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\mathcal{P}(n) : A^n = PD^nP^{-1}$$

- Puisqu'on a $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = A^0$, on a $\mathcal{P}(0)$.
  La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : A^n = PD^nP^{-1}$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

  $$PD^{n+1}P^{-1} = PD^nDP^{-1}$$

  Mais puisque $P^{-1}P = I_2$, on peut écrire :

  $$PD^nDP^{-1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$$

  Et comme par hypothèse de récurrence, on a $A^n = PD^nP^{-1}$:

  $$PD^nP^{-1}PDP^{-1} = A^nA = A^{n+1}$$

  Au final, on a :

  $$PD^{n+1}P^{-1} = A^{n+1}$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \geqslant 0$), elle sera donc vraie pour tout rang n, ce qui démontre l'égalité souhaitée.

4. Une expression de u_n et de v_n en fonction de n va s'obtenir en calculant le vecteur colonne X_n :

$$X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

D'où :

$$u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \text{ et } v_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

Et enfin, puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{1}{6} \in]-1\,,1[$$

on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5}$$

. . . .