75 questions « type-bac » **2018**

Série **S** - Mathématiques

Enseignement spécifique et de spécialité

Énoncés seuls

⚠⚠ VERSION LIGHT ⚠⚠

Félicitations !

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;
3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles ;
4. nous rappelons que le jour du baccalauréat, **les méthodes de raisonnement ainsi que la qualité de la rédaction utilisées par le candidat entrent dans une part importante de l'évaluation** ;
5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://question-type-bac.fr/

Table des matières

1 Suites et récurrence **4**

1.1 Récurrence 4

1.2 Suites géométriques 5

1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite) 6

1.4 Utiliser une suite auxiliaire 8

2 Limites et asymptotes **9**

2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles 9

2.2 Formes indéterminées 9

3 Continuité et dérivabilité **10**

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (théorème de la bijection) 10

3.2 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction 10

3.3 Équation de la tangente 10

3.4 Lectures graphiques 11

4 Fonctions exponentielles et logarithmes **12**

4.1 Résoudre une (in)équation 12

4.2 Étude de fonctions 12

4.3 Avec des suites 13

5 Nombres complexes **14**

5.1 Equations du second degré 14

5.2 Nombre complexe conjugué 14

5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe 14

5.4 Nombres complexes et géométrie 15

6 Géométrie dans l'espace **16**

6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace 16

6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques 16

6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques 17

6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence 17

7 Calcul intégral **19**

7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive 19

7.2 Calcul de l'aire d'un secteur 20

7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction 20

7.4 Intégrales et suites 21

8 Probabilités conditionnelles - Indépendance **22**

8.1 Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales 22

8.2 Indépendance d'événements 22

8.3 Probabilités et suites 23

9 Arithmétique **24**

9.1 Divisibilité - Division euclidienne 24

9.2 Entiers premiers entre eux 24

9.3 Congruences 25

9.4 Nombres premiers 27

10 Matrices et suites matricielles **28**

10.1 Calculs algébriques sur les matrices 28

10.2 Suites de matrices 29

10.3 Graphes probabilistes 29

11 Lois de probabilités **30**

11.1 Lois quelconques 30

11.2 Lois binomiales 30

11.3 Lois uniformes 32

11.4 Lois normales 32

11.5 Lois exponentielles 33

12 Intervalles de fluctuation et de confiance **34**

Index **35**

BAC S - THÈME 1

Suites et récurrence

1.1 Récurrence

Q 1 - Démontrer une conjecture [$\star$]

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{cases}$$

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Q 2 - Une démonstration de cours sur le logarithme [$\star\star$]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée $(\star)$, valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

Q 3 - Une suite stationnaire [$\star\star$]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1$.

1.2 Suites géométriques

Q 4 - Suite géométrique et pourcentages [⋆]

Un étudiant paye un loyer mensuel de 400 euros pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%. On note u_n le loyer mensuel après n années, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1, c'est-à-dire le montant du loyer mensuel après une année.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Après 6 années, le montant du loyer mensuel a augmenté de :

☐ 42% ☐ 50% ☐ 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

Q 5 - Calcul du coût total d'un crédit [⋆⋆]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) la somme remboursée la n-ième année.

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$. En déduire u_{10}.

3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

Q 6 - Somme des termes d'une suite géométrique [⋆⋆]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000 + n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0{,}95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

Q 7 - Démontrer qu'une suite est géométrique [⋆⋆]

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1}\ ,\ v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24 \ \text{ et } \ w_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

Q 8 - Limite d'une suite géométrique [⋆⋆]

Soient (u_n) et (v_n) les suites géométriques définies respectivement par :

$$u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \ \text{ et } \ v_n = \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$$

1. Préciser la limite de ces deux suites.

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$s_n = u_n + v_n$$

La suite (s_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$p_n = u_n \times v_n$$

La suite (p_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)

Q 9 - Suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ [⋆⋆]

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 3 - \frac{4}{u_n + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. On souhaite disposer d'un algorithme permettant de calculer n'importe quel terme de cette suite, pour un entier n donné supérieur ou égal à 1. Compléter les lignes sur lesquelles apparaissent des points de suspension (...) afin d'arriver à cet objectif.

Algorithme (langage naturel)

```
VARIABLES
N EST DU TYPE NOMBRE
U EST DU TYPE NOMBRE
I EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
AFFICHER « Entrer la valeur de u(0) »
LIRE U
AFFICHER « Entrer la valeur de n (au moins 1) »
LIRE N
POUR I ALLANT DE 1 A ........
  DEBUT_POUR
    U ← ........
  FIN_POUR
AFFICHER U
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```
def suite(u,n) :
  if n == 0 :                    ♯ si n vaut 0 alors
    return u                     ♯ retourner u_0
  else :                         ♯ sinon
    for i in range(1,........) : ♯ pour i allant de 1 à ?
      u = ........               ♯ calculer la nouvelle valeur de u
    return u                     ♯ retourner u
```

Q 10 - Suite où u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n et de n [⋆⋆]

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 2n + 1 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Compléter, ci-dessous, l'algorithme permettant de calculer n'importe quel terme u_n de cette suite.

Que retourne cet algorithme pour $n = 10$?

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1$$

Cette suite (u_n) est-elle convergente ?

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 3^n + n$$

Retrouver ainsi la valeur de u_{10}.

Algorithme (langage naturel)

```
VARIABLES
N EST DU TYPE NOMBRE
U EST DU TYPE NOMBRE
I EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
U ← 1
AFFICHER « Entrer la valeur de n (au moins 1) »
LIRE N
POUR I ALLANT DE 1 A N
  DEBUT_POUR
    U ← ........
  FIN_POUR
AFFICHER U
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```
def suite(n) :
  if n == 0 :                  ♯ si n vaut 0 alors
    return 1                   ♯ retourner u_0
  else :                       ♯ sinon
  u=1                          ♯ initialisation
    for i in range(1,n+1) :    ♯ pour i allant de 1 à n
      u = ........             ♯ calculer la nouvelle valeur de u
    return u                   ♯ retourner u
```

1.4 Utiliser une suite auxiliaire

Q 11 - Suite arithmético-géométrique [★★]

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 5 \end{cases}$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{5}{2}$$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q que l'on précisera. Calculer son premier terme v_0.

2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Limites et asymptotes

2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Q 12 - Limites de fonctions polynômes et fonctions rationnelles - Asymptotes [⋆⋆]

Soient a un réel et f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 - 5x + 3 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = \frac{ax^2 - 2x + 1}{2x^2 + x + 11} \text{ pour } x \in \mathbb{R}\,[1]$$

Étudier les limites de f et g en $+\infty$ selon les différentes valeurs de a.

Préciser également, selon les différentes valeurs de a, les équations des éventuelles asymptotes, en $+\infty$, aux courbes C_f et C_g des fonctions f et g.

2.2 Formes indéterminées

Q 13 - Formes indéterminées avec exponentielles et logarithmes - Asymptotes [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$$

1. Étudier les limites de f en 0 puis en $+\infty$.

2. Préciser les équations des éventuelles asymptotes à la courbe C_f de la fonction f.

Q 14 - Formes indéterminées avec exponentielles et logarithmes (bis) [⋆⋆]

Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{2x}{x + \mathrm{e}^x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\ln(x) - x^2}{x^2}$$

Étudier les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ ainsi que les limites de g en 0^+ et $+\infty$. Préciser les équations des éventuelles asymptotes aux courbes C_f de C_g des fonctions f et g.

1. la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur $2x^2 + x + 11$ ne s'annule jamais. En effet, le discriminant Δ du trinôme $2x^2 + x + 11$ est négatif ($\Delta = -87$).

Continuité et dérivabilité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (théorème de la bijection)

Q 15 - Solution d'une équation du type $f(x) = k$: existence et unicité [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,,2]$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3.2 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction

Q 16 - Comparaison entre e^x et $x+1$ [⋆⋆]

Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$$

3.3 Équation de la tangente

Q 17 - Tangente commune à deux courbes en un même point [⋆⋆]

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Calculer $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$. En déduire que les courbes C_f et C_g admettent un point commun A.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent la même tangente au point A.

3.4 Lectures graphiques

Q 18 - Lecture graphique de nombres dérivés [$\star$]

Soient f et g les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous.

La droite T est tangente aux courbes C_f et C_g.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection (visibles sur le graphique) entre C_f et C_g.

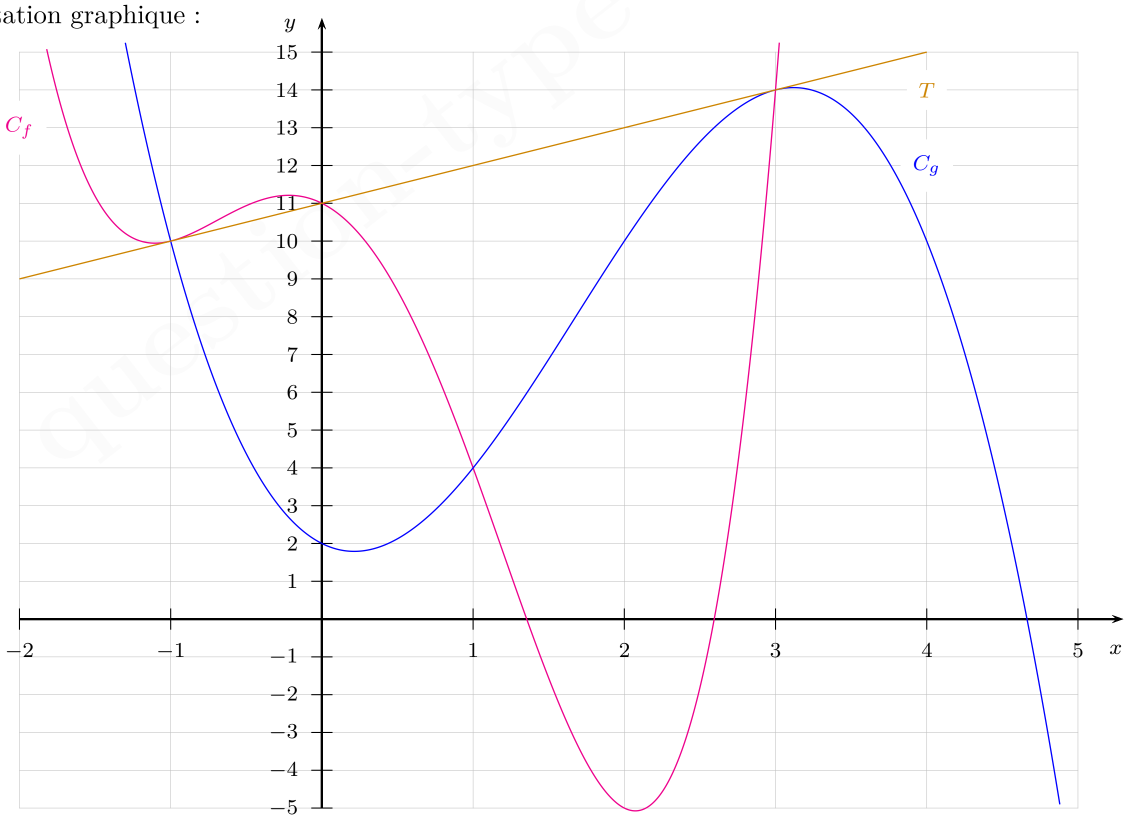
2. Lire graphiquement $f'(-1)$ et $g'(3)$.

3. On donne :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

Retrouver les résultats des deux questions précédentes par calcul.

Représentation graphique :



Fonctions exponentielles et logarithmes

4.1 Résoudre une (in)équation

Q 19 - Résoudre une inéquation comportant une exponentielle [⋆⋆]

Un agriculteur cultive des tomates à partir de semis qu'il repique ensuite sous serre.

Après repiquage, la hauteur moyenne des plants au cours du temps est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{3}{2 + 22\mathrm{e}^{-0,12t}}$$

où t est le temps exprimé en jours à partir du repiquage et $h(t)$ la hauteur moyenne du plant en mètres.

1. Calculer $h(0)$. Quelle est la taille moyenne des semis repiqués ?

2. Calculer la limite de la fonction h lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter.

3. Au bout de combien de temps, la taille moyenne d'un plant dépassera-t-elle 1 mètre ?

Q 20 - Résoudre une (in)équation comportant des logarithmes [⋆⋆]

Dans chaque cas, préciser les contraintes (c'est-à-dire les nombres réels x pour lesquels l'(in)équation a un sens) puis résoudre :

1. $$2\ln(3x-1) = \ln\left(x^2\right)$$

2. $$\ln(x-1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(2x-5)$$

4.2 Étude de fonctions

Q 21 - Étudier une fonction comportant un logarithme [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Dresser le tableau de variations (complet) de f.

4.3 Avec des suites

Q 22 - Propriétés des logarithmes et suites [⋆⋆]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \mathrm{e}^3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, on a :

$$u_n > 0$$

Pour la suite de l'exercice, on pose $v_n = \ln\big(u_n\big) - 2$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme v_0.

3. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

4. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est égale à e^2.

Nombres complexes

5.1 Equations du second degré

Q 23 - Résolution d'équations du second degré [⋆]

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$z^2 = -16$$

$$9z^2 - 6z + 2 = 0$$

Q 24 - Résolution d'une équation à coefficients complexes [⋆⋆]

On considère l'équation (E) suivante, dont l'inconnue z est un nombre complexe :

$$(E) : z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(1+2\mathrm{i})z - 4\mathrm{i} = 0$$

1. Vérifier que le nombre complexe $z_0 = 2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

2. Déterminer trois nombres a, b et c tels que :

$$z^3 - 2(1+\mathrm{i})z^2 + 2(1+2\mathrm{i})z - 4\mathrm{i} = (z-2\mathrm{i})(az^2+bz+c)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

5.2 Nombre complexe conjugué

Q 25 - Résolution d'une équation complexe avec conjugué [⋆]

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$2z + 6\overline{z} + 8 + 4\mathrm{i} = 0$$

5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe

Q 26 - VRAI ou FAUX avec justifications sur les nombres complexes [⋆⋆]

Soient Z et Z' des nombres complexes.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si Z est un nombre réel non nul, alors $\arg(Z) = 0\,[2\pi]$.

2. Si $Z = 1 + \mathrm{i}$ et $Z' = -\sqrt{2}$ alors $|Z| = |Z'|$.

3. Le nombre $4Z\overline{Z} + \left(Z - \overline{Z}\right)^2$ est toujours un réel positif.

4. Si $Z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$.

5. On a toujours $|Z + Z'|$ qui est égal à $|Z| + |Z'|$.

Q 27 - Utiliser l'écriture ad-hoc pour calculer avec des nombres complexes [⋆⋆]

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
L'écrire sous forme trigonométrique puis exponentielle.

2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $Z = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{11}$.

3. Déterminer l'argument principal de Z.

Q 28 - Suite de nombres complexes [⋆⋆]

On considère la suite géométrique (Z_n) de nombres complexes de raison $1 + \mathrm{i}$ et de terme initial $Z_0 = 1$.

1. Exprimer Z_n en fonction de n.

2. Calculer Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$Z_{4n} = (-4)^n$$

4. Déterminer le module et l'argument principal de Z_{2015}.

5.4 Nombres complexes et géométrie

Q 29 - Nombres complexes et géométrie [⋆⋆]

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + 3\mathrm{i} \quad ; \quad z_B = -3 - \mathrm{i} \quad ; \quad z_C = 2{,}08 + 1{,}98\mathrm{i}$$

1. Calculer le nombre complexe $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

$$|z + 2 - 3\mathrm{i}| = |z + 3 + \mathrm{i}|$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$. Déterminer un réel k dont l'image K est élément de $\mathcal{E}$.

3. Le point D d'affixe $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ est-il élément de $\mathcal{E}$?

4. Calculer l'aire du triangle ADB.

Géométrie dans l'espace

6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace

Q 30 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un vecteur normal et un point [⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le point $A(1\,,3\,,-2)$ et le vecteur :

$$\vec{n}\left|\begin{array}{c}7\\-2\\3\end{array}\right.$$

Determiner une équation cartésienne du plan P passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{n}$.

Q 31 - Plans perpendiculaires [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le plan P_1 d'équation cartésienne :

$$P_1 : 7x - 2y + 3z + 5 = 0$$

1. Le point $B(1\,,2\,,1)$ appartient-il au plan P_1 ?
Déterminer un point C d'abscisse nulle appartenant au plan P_1.

2. Soit P_2 un plan de vecteur normal :

$$\vec{m}\left|\begin{array}{c}0\\\beta\\\gamma\end{array}\right.$$

Déterminer ce vecteur normal de sorte que le plan P_2 soit perpendiculaire au plan P_1.

3. Sachant que le point B appartient au plan P_2, déterminer une équation cartésienne de ce plan P_2.

6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques

Q 32 - Déterminer un système d'équations paramétriques d'une droite [⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points A, B et C donnés par :

$$A(3\,,0\,,-4) \quad ; \quad B(1\,,-1\,,-3) \quad ; \quad C(-1\,,1\,,4)$$

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

2. Le point C est-il situé sur cette droite ?

Q 33 - Étudier l'intersection éventuelle de deux droites de l'espace [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les deux droites D_1 et D_2 définies par les systèmes d'équations paramétriques respectifs suivants :

$$D_1:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-1 \\ y & = & 3t+2 \\ z & = & -t+6 \end{array}\right. \text{ où } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad D_2:\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t'+3 \\ y & = & 5t'+1 \\ z & = & 2t'-1 \end{array}\right. \text{ où } t'\in\mathbb{R}$$

Étudier si ces deux droites de l'espace sont sécantes et déterminer, le cas échéant, les coordonnées de leur point d'intersection.

6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques

Q 34 - Équation d'un plan passant par trois points [⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points A, B et C donnés par :

$$A(3\,,0\,,-4) \quad ; \quad B(1\,,-1\,,-3) \quad ; \quad C(-1\,,1\,,4)$$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan P.

6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence

Q 35 - Points d'intersection d'un plan avec les axes de coordonnées [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le plan P défini par l'équation cartésienne suivante :

$$P: 3x+2y+4z-12=0$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels entre le plan P et les axes de coordonnées (Ox), (Oy) et (Oz).

Q 36 - VRAI ou FAUX avec justifications [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, on considère les points A, B et C donnés par :

$$A\left(0\,,-\sqrt{2}\,,1\right) \quad ; \quad B\left(\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,,3\right) \quad ; \quad C(1\,,1\,,1)$$

Préciser si chacune des propositions suivantes est VRAIE (et dans ce cas la démontrer) ou FAUSSE (et dans ce cas, démontrer sa fausseté ou donner un contre-exemple).

1. L'équation cartésienne $y = 2x - \sqrt{2}$ est celle de la droite (AB).

2. Un vecteur directeur de la droite (AB) est :

$$\overrightarrow{d}\ \left|\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{array}\right.$$

3. La distance AB est égale à $2\sqrt{3}$.

4. Une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$\left(\sqrt{2}+4\right)x - 2y - 2z = 0$$

Calcul intégral

7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive

Q 37 - Cas où une primitive est suggérée par l'énoncé [⋆⋆]

Soit f la fonction logarithme népérien :

$$f(x) = \ln(x) \text{ pour } x \in]0\,,+\infty[$$

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$F(x) = x\ln(x) - x$$

est une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$.

2. En déduire les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_{1/2}^{2} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Q 38 - Utilisation d'une forme dont on connaît les primitives [⋆⋆]

Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Q 39 - Cas où l'on obtient une primitive par transformation d'écriture [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

2. En déduire l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\ln(1/2)}^{\ln(2)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

7.2 Calcul de l'aire d'un secteur

Q 40 - Calcul de l'aire d'un secteur [⋆]

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{2-x}$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives de ces deux fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$f(x) = g(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g.

2. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points $(x\,,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant g(x) & \text{lorsque} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

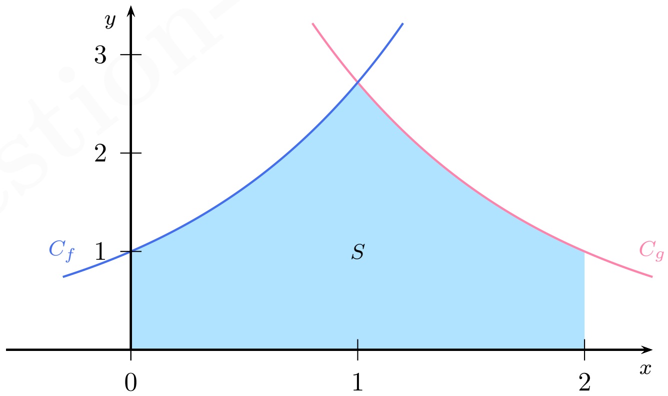


FIGURE 7.1 – Secteur S sous plusieurs courbes.

7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction

Q 41 - Calcul de la valeur moyenne d'une fonction [⋆⋆]

La hauteur d'une plante, au cours du temps, est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{2}{1 + 10\mathrm{e}^{-0,1t}}$$

où t est le temps exprimé en semaines ($0 \leqslant t \leqslant 300$) et $h(t)$ la hauteur de la plante exprimée en mètres.

Les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près.

1. Calculer la hauteur de la plante après 30 semaines, puis après 60 semaines.

2. Démontrer que, pour tout $t \in [0\,,300]$, on a :

$$h(t) = 20 \times \frac{0{,}1\mathrm{e}^{0,1t}}{\mathrm{e}^{0,1t} + 10}$$

En déduire une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0\,,300]$.

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[30\,,60]$.

Interpréter le résultat.

7.4 Intégrales et suites

Q 42 - Étude d'une suite définie par une intégrale [⋆]

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Calculer u_0.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Probabilités conditionnelles - Indépendance

8.1 Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales

Q 43 - Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales [⋆⋆]

Un élève de terminale est dans une série où le taux de réussite au baccalauréat est de 80%.

Après son année de terminale, qu'il ait eut son bac ou non, il passe un concours d'admission à une école dont les taux d'admissions sont les suivants :

- parmi les candidats bacheliers qui présentent ce concours, 60% sont admis dans cette école ;
- parmi les candidats non bacheliers qui présentent ce concours, 30% sont admis dans cette école.

1. Calculer la probabilité que l'élève ait sont bac et soit admis dans l'école.

2. Calculer la probabilité que l'élève soit admis dans l'école.

3. Sachant que l'élève a été admis à l'école, quelle est la probabilité qu'il ait eut son bac ?

8.2 Indépendance d'événements

Q 44 - Indépendance d'événements [⋆⋆]

On lance deux dés à 6 faces, non truqués, et donc les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note A, B et C les événements suivants :

A : « la somme obtenue est un nombre premier »

B : « les deux dés affichent le même résultat »

C : « la somme obtenue est un multiple de 3 »

1. Calculer les probabilités de A, B et C.

2. Parmi les trois événements précédents, deux sont indépendants entre eux ; lesquels ?

Q 45 - Indépendance des événements contraires [⋆⋆]

1. Soient A et B deux événements indépendants.
Démontrer que A et $\overline{B}$ sont également indépendants.
Démontrer que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

2. Une entreprise fabrique des tiges cylindriques. La probabilité de l'événement L : « la tige est conforme pour la longueur » est $\mathbb{P}(L) = 0{,}97$. On note D l'événement : « la tige est conforme pour le diamètre ». On suppose que L et D sont indépendants et on sait que $\mathbb{P}\left(\overline{L} \cup \overline{D}\right) = 0{,}12$. On prélève une tige au hasard. Calculer la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre.

8.3 Probabilités et suites

Q 46 - Probabilités conditionnelles et suites [⋆⋆]

Un archer étudie ses statistiques de réussite lors de séances de tirs à l'arc. Il remarque que lors d'une série :

- il possède 70% de chance de réussir le premier tir ;
- s'il réussit un tir, alors il gagne en confiance et possède 80% de chance de réussir le suivant ;
- s'il rate un tir, alors il perd confiance et ne possède plus que 60% de chance de réussir le suivant.

On note p_n la probabilité que l'archer réussisse le $n-$ième tir de la série.

1. À l'aide d'un arbre illustrant la transition entre $n-$ième et le $(n+1)-$ième tir, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$$

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = p_n - 0{,}75$$

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison q ainsi que son premier terme u_1.

3. Exprimer u_n, puis p_n, en fonction de n.

4. Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter.

BAC S - THÈME 9

Arithmétique

9.1 Divisibilité - Division euclidienne

Q 47 - Propriétés de la divisibilité [⋆]

Dans cet exercice, les nombres a et b désignent des entiers relatifs.

1. Développer et simplifier l'expression suivante :

$$6(2a+3b)-7(a+2b)$$

2. En déduire que si le nombre 7 divise $2a+b$ alors il divise $5a+4b$.

3. On voudrait maintenant étudier la réciproque de la question précédente.

Pour cela, déterminer deux entiers relatifs α et β tels que :

$$6(5a+4b)-7(\alpha a+\beta b)=2a+3b$$

La réciproque en question est-elle vraie ?

Q 48 - Divisibilité et somme [⋆⋆]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer, en fonction de n, la somme suivante :

$$S_n = 1+6+6^2+\cdots+6^{n-1}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6^n+14 est un multiple de 5.

Q 49 - VRAI ou FAUX sur la divisibilité [⋆⋆]

Les nombres a, b et n ci-dessous sont des entiers naturels non nuls.

1. Si n divise $a+b$ et ab alors n divise a.

2. $n(n+1)$ est toujours un entier pair.

3. Il existe des entiers a et b tels que $3a+12b=22$.

4. Si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n alors $a-b$ est un multiple de n.

5. n et n^2 ont la même parité.

9.2 Entiers premiers entre eux

Q 50 - Entiers premiers entre-eux [⋆]

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les nombres n^2 et $n+1$ sont premiers entre-eux.

2. Démontrer que si p est un nombre premier ne divisant pas un entier n, alors p et n sont premiers entre-eux.

Q 51 - Suite de Fibonacci et nombres premiers entre eux [★★]

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1}u_{n-1} - \left(u_n\right)^2 = (-1)^n$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\text{PGCD}(u_n\,,u_{n+1}) = 1$$

Q 52 - Nombre premier divisant un carré [★]

Soit p un nombre premier divisant un carré n^2.

Démontrer que p divise n.

Q 53 - Polynôme avec un coefficient principal égal à 1 et coefficients entiers [★★]

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^2 + ax + b$$

où a et b sont des entiers.

Démontrer que si α est une racine rationnelle de P alors α est un nombre entier.

Q 54 - Équation diophantienne [★★]

On considère l'équation (E) suivante dont les inconnues x et y sont dans $\mathbb{Z}$:

$$(E) : 7x - 5y = 1$$

1. Vérifier que le couple $(x\,,y) = (3\,,4)$ est solution de (E).

2. Démontrer qu'un couple $(x\,,y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x-3) = 5(y-4)$.

3. En déduire que les solutions de (E) sont les couples $(x\,,y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x = 5k+3 \\ y = 7k+4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

9.3 Congruences

Q 55 - Congruences et multiplications [★]

Soit n un entier naturel.

Démontrer que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier naturel.

Q 56 - Congruences et récurrence [$\star$]

Soit n un entier naturel.

Démontrer par récurrence que $n^3 - n \equiv 0\,[3]$.

Q 57 - Congruences et récurrence (bis) [$\star\star$]

1. Démontrer, à l'aide des congruences, que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$4^n \equiv 1\,[3]$$

2. Retrouver ce résultat grâce à un raisonnement par récurrence.

Q 58 - Résolution d'une équation modulo 11 [$\star\star$]

Résoudre l'équation $x^2 \equiv 5\,[11]$.

Q 59 - Un critère de divisibilité par 11 [$\star\star$]

1. Démontrer que, pour tout entier naturel m, on a :

$$10^m \equiv (-1)^m\,[11]$$

2. Soit x un entier naturel à 4 chiffres. On note $x = \overline{abcd}$ son écriture décimale, autrement dit :

$$x = 1000a + 100b + 10c + d$$

où a, b, c et d sont des entiers compris entre 0 et 9.
Démontrer que x est divisible par 11 si et seulement si $a + c - (b + d)$ est divisible par 11.

3. On considère maintenant un entier naturel quelconque $x = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ à n chiffres. Les chiffres a_0, a_2, a_4, etc, sont appelés les chiffres de rang pair. Les autres, à savoir a_1, a_3, etc, sont appelés les chiffres de rang impair.
Démontrer que x est divisible par 11 si et seulement la différence entre la somme de ses chiffres pairs et la somme de ses chiffres impairs est divisible par 11.

9.4 Nombres premiers

Q 60 - Des fausses conjectures sur les nombres premiers [⋆]

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 + n + 41$$

Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. Parmi ces nombres, lesquels sont premiers ?

Le nombre u_{40} est-il premier ?

2. On considère la suite (F_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$F_n = 2^{(2^n)} + 1$$

Calculer F_0, F_1, F_2. Ces nombres sont-ils premiers ?

Effectuer la division euclidienne de F_5 par 641. Le nombre F_5 est-il premier ?

Q 61 - Utilisation d'une factorisation [⋆⋆]

Soit n un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

1. Démontrer que :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2$$

2. Le nombre entier $n^4 + 4$ peut-il être premier ?

3. Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre $5^4 + 4$.

BAC S - THÈME 10

Matrices et suites matricielles

10.1 Calculs algébriques sur les matrices

Q 62 - Calculer l'inverse d'une matrice 2x2 [⋆]

1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que cette matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

2. Démontrer que la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est égale à son inverse.

Q 63 - Calculer l'inverse d'une matrice 3x3 par factorisation [⋆⋆]

1. On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $A^2 = 3A - 2I_3$.

2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Q 64 - Résoudre un système linéaire matriciellement [⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les trois plans définis ci-dessous par leurs équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : 3x - 5y + 2z - 7 = 0$$

$$P_2 : -4x + 3y + 3z - 23 = 0$$

$$P_3 : 5x + 4y - 2z + 1 = 0$$

On admet que ces trois plans se coupent en un unique point I.

Déterminer les coordonnées de I.

10.2 Suites de matrices

Q 65 - Suite géométrique matricielle [⋆⋆]

On considère la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que :

$$U_{n+1} = AU_n$$

3. Calculer A^{20} à l'aide de la calculatrice. En déduire u_{20}.

10.3 Graphes probabilistes

Q 66 - Graphe probabiliste - État stable [⋆⋆]

Au début d'une étude démographique portant sur les 1200 personnes d'une île, le quart de la population vivait dans la capitale. Depuis, chaque année, 40% des habitants de la capitale quittent celle-ci pour aller vivre dans le reste de l'île tandis que 20% des habitants du reste de l'île viennent habiter dans la capitale.

1. Décrire cette situation par un graphe probabiliste, donner sa matrice de transition M et l'état initial P_0.

2. Déterminer, après 2 années, l'état probabiliste P_2 et l'interpréter.

3. Prouver qu'il existe un état stable P et l'interpréter.

BAC S - THÈME 11

Lois de probabilités

11.1 Lois quelconques

Q 67 - Calcul d'espérance [⋆⋆]

Dans cet exercice, n est un entier vérifiant $n \geqslant 4$. On place n jetons dans une urne : un jaune et des blancs. À chaque fois que l'on choisit, au hasard, un jeton de l'urne on note :

$$J = \text{« le jeton obtenu est jaune »}$$

$$B = \text{« le jeton obtenu est blanc »}$$

On considère le jeu suivant : on choisit successivement deux jetons, avec remise. On gagne 16 euros si l'on obtient deux fois le jeton jaune ; on gagne 1 euros si l'on obtient deux fois un jeton blanc et on perd 5 euros sinon. On note X le gain algébrique en euros ($+16$; $+1$ ou -5).

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 16)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = -5)$ en fonction de n.

3. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.
Combien de jetons faut-il mettre au total dans l'urne pour que ce jeu soit équitable ?

11.2 Lois binomiales

Q 68 - Calculs avec la loi binomiale [⋆⋆]

Un archer possède 40% de chance d'atteindre une cible. Il effectue 15 tirs successivement.
On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'il en réussisse exactement 10.

2. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au plus 6.

3. Calculer la probabilité qu'il en réussisse entre 8 et 12.

4. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au moins 6.

5. Combien de tirs peut-il espérer réussir ?

On donnera les résultats des probabilités à 10^{-4} près.

Q 69 - Étude d'une inéquation du type $a^n \leqslant b$ par algorithme et par calcul [★★]

On lance plusieurs fois de suite un dé (à 6 faces et bien équilibré).

On note n le nombre de lancers ($n \geqslant 2$) et X le nombre de 6 obtenus.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers) est :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2. Un informaticien conçoit l'algorithme suivant :

Algorithme en langage naturel

Déclarations	R est un réel
	n est un entier
Entrée	SAISIR le nombre R, compris entre 0 et 1
Initialisation	$n \leftarrow 0$
Traitement	TANT_QUE 1 - (5/6)^n < R
	DEBUT_TANT_QUE
	$n \leftarrow n+1$
	FIN_TANT_QUE
Sortie	AFFICHER le nombre n

Algorithme en Python

```
def nb_de_lancers(R) :
  n = 0
  while 1 - (5/6)**n < R :
    n = n + 1
  return n
```

Compléter le tableau suivant dans le cas où l'utilisateur rentre la valeur $R = 0{,}5$ dans l'algorithme ci-dessus :

Valeur de n	0	1	2				
Valeur de $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$	0						
Condition $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n < R$	Vrai						

Quelle valeur de n est affichée en sortie ?

Les résultats numériques de cette question seront arrondis à 10^{-4} près.

3. À l'aide de l'algorithme précédent, préciser combien de fois il faudrait lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 50%.

4. Retrouver le résultat précédent en résolvant, par un calcul rigoureux, l'inéquation $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}5$.

11.3 Lois uniformes

Q 70 - Calculs directs et réciproques avec la loi uniforme [⋆⋆]

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

Lorsqu'il se connecte sur le site, le durée nécessaire pour que les quatre amis soient réunis est une variable aléatoire D, exprimée en secondes.

On admet que cette variable aléatoire D suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\,,120]$.

1. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps inférieur à une minute.

2. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps compris entre 60 et 90 secondes.

3. Un des amis remarque que dans 10% des cas, ils se retrouvent tous réunis en moins d'un certain temps t.
Calculer ce temps t.

4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D.
Interpréter le résultat.

11.4 Lois normales

Q 71 - Calculs directs et réciproques avec la loi normale [⋆⋆]

Dans une population, on étudie la taille des individus.

La moyenne des individus est $\mu = 1{,}76$ m. L'écart-type est $\sigma = 0{,}10$ m.

On choisit un individu au hasard et on note X sa taille.

On admet que cette variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}$ de moyenne μ et d'écart-type σ. On notera [1] $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$.

1. Calculer la probabilité que cet individu mesure moins de 1,80 m.

2. Calculer la probabilité que cet individu mesure entre 1,70 m et 1,80 m.

3. Calculer la probabilité que cet individu mesure plus de 2 m.

4. On sait que cet individu est tel que 75% des personnes de la population sont plus petites que lui. Quelle taille mesure cet individu ?

On arrondira les calculs numériques à 10^{-4} près.

1. certains auteurs ou ouvrages notent $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu\,,\sigma^2\right)$.

Q 72 - Intervalles de centre μ et de rayon $k\sigma$ [★★]

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\,, \sigma)$$

Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$$

On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

11.5 Lois exponentielles

Q 73 - Calculs avec la loi exponentielle [★★]

Une entreprise fabrique des robots. Le service qualité étudie leur fiabilité. On note T le temps (exprimé en année) au bout duquel survient la première panne d'un de ces robots. On admet que T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Les probabilités seront données à 10^{-2} près.

1. Interpréter par une phrase la condition $\mathbb{P}(T > 6) = 0{,}30$.
Déterminer la valeur de λ, à 10^{-2} près, pour que cette condition soit satisfaite.
Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}20$.

2. Calculer la probabilité qu'un robot fonctionne au moins deux années sans avoir de pannes.

3. Calculer la probabilité que la première panne survienne après trois ans et avant cinq ans.

4. L'entreprise souhaite communiquer un slogan publicitaire du type « 75% de nos robots fonctionnent x mois sans la moindre panne ». Déterminer cette durée x (au mois près) qu'il faut annoncer dans le slogan.

5. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore durant 4 ans (au moins) sans la moindre panne ?

BAC S - THÈME 12

Intervalles de fluctuation et de confiance

Q 74 - Intervalle de fluctuation - Règle de décision [⋆⋆]

Une élection a eu lieu et un candidat, Monsieur G. GANIET, est élu avec 72% des suffrages exprimés.
Suspicieux ou mauvais perdant, un autre candidat, Monsieur D. MAULI, demande un recomptage des voix dans deux bureaux de vote :

- dans le bureau n° 1, 500 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 75% des suffrages ;
- dans le bureau n° 2, 1000 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 79% des suffrages.

1. Sachant que sur l'ensemble des suffrages exprimés, le candidat G. GANIET a obtenu un score de 72%, calculer un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95%, de la fréquence des voix en sa faveur pour un échantillon de taille $n = 500$.
Peut-on considérer que le score de 75% dans le bureau de vote n° 1 est significativement éloigné du score de référence de 72% au point d'affirmer (avec un niveau de confiance de 95%) qu'il y a eu une fraude dans ce bureau de vote ?

2. Même question avec le bureau de vote n° 2 (on calculera un intervalle de fluctuation asymptotique pour un échantillon de taille $n = 1000$).

http://question-type-bac.fr

Q 75 - Intervalle de confiance - Détermination de la taille d'un échantillon [⋆⋆]

À l'approche d'une élection, un institut effectue un sondage auprès d'un échantillon de 1000 personnes en leur demandant si elles sont prêtes à voter pour le candidat Monsieur J. KHROA. À l'issue de ce sondage, il s'avère que 52% des personnes interrogées se disent prêtes à voter pour ce candidat.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion des électeurs prêts à voter pour Monsieur J. KHROA.

2. Quelle est l'amplitude, en points, de cet intervalle ?

3. On voudrait désormais avoir un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, ayant une amplitude de 2 points seulement. Calculer la taille de l'échantillon des personnes à interroger pour parvenir à cet objectif.

http://question-type-bac.fr

Découvrez les corrigés détaillés ainsi que des rappels de cours sur notre site :

http://question-type-bac.fr/nos-documents/

Index

A

aire, 20
algorithme, 6, 7, 31
amplitude d'un intervalle, 34
argument
    d'un nombre complexe, 14, 15
    principal, 15
asymptotes, 9
axes de coordonnées, 17

C

calcul
    d'aire, 20
    de distance, 15
calcul intégral, 19
centrage et réduction, 32
congruences, 26
conjecture, 4
conjugué d'un nombre complexe, 14
critère
    d'indépendance, 22
    de divisibilité par 11, 26

D

dés, 22
distance, 15
divisibilité
    par 11, 26
droites
    sécantes, 17

E

échantillon conforme ou non, 34
équation
    avec logarithmes, 12
    avec nombres complexes, 14
    cartésienne d'un plan, 16
    de la tangente, 10
    diophantienne, 25
espérance, 30
état
    initiale, 29
    probabiliste, 29
    stable, 29
événements contraires, 22
exponentielle, 9, 10, 12, 13, 19, 20

F

fonction
    polynôme, 9
    primitive, 19, 20
forme
    algébrique d'un nombre complexe, 15
    exponentielle d'un nombre complexe, 15
    indéterminée, 9
    trigonométrique d'un nombre complexe, 15
formule
    des probabilités totales, 22

G

géométrie dans l'espace, 16
graphe
    probabiliste, 29

H

hérédité, 4

I

inéquation, 12
    avec exponentielles, 12
    avec logarithmes, 12
indépendance, 22
initialisation, 4
intégrales, 19
intervalle
    de confiance, 34
    de fluctuation, 34
intervalle et loi normale, 33

L

lectures graphiques, 11
limite
    d'un polynôme, 9
    d'une fonction, 9
    d'une fonction rationnelle, 9
    d'une suite, 23
    d'une suite géométrique, 6
logarithme, 4, 9, 10, 12, 13, 19, 31
loi
    à densité, 32
    binomiale, 30
    discète, 30
    exponentielle, 33
    normale, 32
    uniforme, 32

M

matrice
    de transition, 29
    inverse d'une –, 28
mesure d'angle, 15
module d'un nombre complexe, 14, 15
moyenne, 20

N

nature d'un triangle, 15
nombres complexes, 14

P

point
    d'intersection, 17
pourcentages, 5
primitive, 20
primitives, 19
probabilités conditionnelles, 22

R

récurrence, 4, 6, 7, 13, 15, 25

S

sachant que, 22
second degré, 14
signe
    de la différence, 10
somme de termes, 5
suite
    arithmético-géométrique, 8
    arithmétique, 6
    auxiliaire, 8, 13
    bornée, 6
    convergente, 6
    croissante, 7
    décroissante, 6
    de Fibonacci, 25, 29
    divergente, 7
    géométrique, 5, 6, 8, 13, 15, 23
    géométrique matricielle, 29
    monotone, 6
    stationnaire, 4
système, 17
système d'équations paramétriques
    d'une droite de l'espace, 16
système linéaire, 28

T

tableau
    de variations, 10, 12
tangente, 10, 11
tangente commune, 10
théorème
    de Bézout, 25
    de la bijection, 10
    des gendarmes, 21
    des valeurs intermédiaires, 10

V

valeur moyenne d'une fonction, 20
vecteur(s)
    de probabilités, 29
    directeur, 16, 18
    normal, 16
    orthogonaux, 16
vrai ou faux, 14, 18, 24