

66 questions « type-bac » 2018

Série S - Mathématiques

Enseignement spécifique

(anciennement obligatoire)


Énoncés et corrigés

Félicitations !

Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;
2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;
3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;
4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;
5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

 Ce document est **privé** et **non libre de droit**. Sa diffusion ailleurs que sur le site question-type-bac.fr est interdite.

<http://question-type-bac.fr/>

Table des matières

1 Suites et récurrence	4
1.1 Récurrence	4
1.2 Suites géométriques	6
1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite)	13
1.4 Utiliser une suite auxiliaire	18
2 Limites et asymptotes	19
2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	19
2.2 Formes indéterminées	20
2.3 Utilisation d'un théorème de comparaison	23
3 Continuité et dérivabilité	26
3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire (théorème de la bijection)	26
3.2 Étudier la dérivabilité d'une fonction	29
3.3 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction	30
3.4 Problèmes nécessitant deux dérivations successives	31
3.5 Équation de la tangente	33
3.6 Lectures graphiques	37
4 Fonctions exponentielles et logarithmes	40
4.1 Résoudre une (in)équation	40
4.2 Étude de fonctions	43
4.3 Avec des suites	47
5 Nombres complexes	49
5.1 Equations du second degré	49
5.2 Nombre complexe conjugué	50
5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe	51
5.4 Nombres complexes et géométrie	55
6 Géométrie dans l'espace	57
6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace	57
6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques	58
6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques	61
6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence	64
7 Calcul intégral	69
7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive	69
7.2 Calcul de l'aire d'un secteur	71
7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction	73
7.4 Intégrales et suites	74

8	Probabilités conditionnelles - Indépendance	77
8.1	Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales	77
8.2	Indépendance d'événements	78
8.3	Probabilités et suites	80
9	Lois de probabilités	82
9.1	Lois quelconques	82
9.2	Lois binomiales	83
9.3	Lois uniformes	88
9.4	Lois normales	89
9.5	Lois exponentielles	101
10	Intervalles de fluctuation et de confiance	103
	Index	106

Suites et récurrence

1.1 Récurrence

Q 1 - Une démonstration de cours sur le logarithme

[★★] [32%]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée (\star) , valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln(A^2) = 2 \ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(A^n) = n \ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln(\sqrt{A}) = \frac{1}{2} \ln(A)$$

<http://question-type-bac.fr>

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln(A^2) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2 \ln(A)$$

2. Considérons la propriété \mathcal{P} définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln(A^n) = n \ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln(A^0) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln(A^n) = n \ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant (\star) :

$$\ln(A^{n+1}) = \ln(A^n \times A) = \ln(A^n) + \ln(A) = n \ln(A) + \ln(A) = (n+1) \ln(A)$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vérifié que la propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

3. Dans cette question, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente car n était un entier. Cependant, à l'aide de la propriété (\star) , on peut écrire :

$$\ln(A) = \ln(\sqrt{A} \times \sqrt{A}) = \ln(\sqrt{A}) + \ln(\sqrt{A}) = 2 \ln(\sqrt{A})$$

D'où, *via* une division par 2 :

$$\ln(\sqrt{A}) = \frac{1}{2} \ln(A)$$

.....

Q 2 - Une suite stationnaire

[★★] [27%]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1$.

<http://question-type-bac.fr>

1. On a :

$$u_1 = 2u_0^2 + 3u_0 - 4 = 2 \times \frac{25}{4} + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 4 = \frac{25}{2} - \frac{15}{2} - \frac{8}{2} = 1$$

$$u_2 = 2u_1^2 + 3u_1 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

$$u_3 = 2u_2^2 + 3u_2 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

Cette suite semble se stabiliser sur la valeur 1 dès que $n \geq 1$. (On dit d'une telle suite qu'elle est *stationnaire*)

2. Considérons la propriété \mathcal{P} définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 1$$

- Puisqu'on a $u_1 = 1$, on a $\mathcal{P}(1)$. La propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 1$).



Noter que, dans cet exemple, on fait démarrer la récurrence à $n = 1$.

- Supposons que, pour un certain entier $n \geq 1$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 1$ qui est satisfaite.

Alors, sous cette condition, on a :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété \mathcal{P} est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété \mathcal{P} est initialisée (pour $n = 1$) et héréditaire (pour $n \geq 1$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \geq 1$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

Q 3 - Comparaison entre n^2 et 2^n

[★★★] [18%]

Démontrer que, pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier que l'on précisera, on a :

$$n^2 \leq 2^n$$

<http://question-type-bac.fr>

Notons \mathcal{P} , la propriété définie par :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n$$

L'énoncé ne nous fournit pas la valeur de l'entier n_0 pour lequel cette propriété est initialisée. Calculons les premières valeurs de n^2 et 2^n afin d'émettre une conjecture.

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32

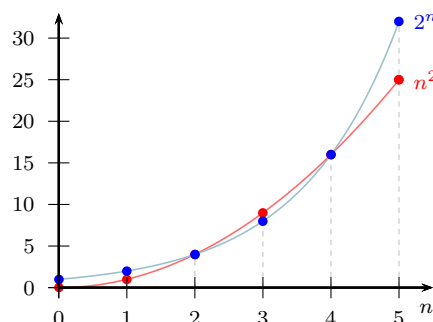


FIGURE 1.1 – Comparaison entre n^2 et 2^n .

On constate que la propriété \mathcal{P} est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ mais pas pour $n = 3$ puis redevient vraie pour $n = 4$ et semble-t-il définitivement. Nous allons donc initialiser notre récurrence pour $n_0 = 4$.

On a donc, bien sûr, $\mathcal{P}(4)$ d'après le tableau ci-dessus.

Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geq 4$, on ait $n^2 \leq 2^n$. Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. Élaborons une déduction en partant du développement de $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ que nous allons majorer étapes par étapes (d'autres façons de raisonner sont possibles!). Nous pouvons écrire :

$$(n+1)^2 \leq n^2 + 2n + \underbrace{2}_{\text{car } n \geq 4 \text{ (et donc } n \geq 1)}} \leq n^2 + 2n + \underbrace{2n}_{\text{car } 4 \leq n} \leq n^2 + \underbrace{4n}_{\text{car } 4 \leq n} \leq n^2 + \underbrace{n^2}_{\text{car on a supposé } \mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n} \leq 2 \times \underbrace{n^2}_{\text{car on a supposé } \mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n} \leq 2 \times \underbrace{2^n}_{\text{car on a supposé } \mathcal{P}(n) : n^2 \leq 2^n} \leq 2^{n+1}$$

On obtient ainsi $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc prouvé que la propriété \mathcal{P} est héréditaire à partir du rang 4. Comme, par ailleurs, elle est vraie au rang 4, elle est donc vraie pour tout $n \geq 4$.

Conclusion :

$$\text{pour tout entier naturel } n \geq 4, \text{ on a bien : } n^2 \leq 2^n$$

1.2 Suites géométriques

Q 4 - Calcul du coût total d'un crédit

[**] [20%]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leq n \leq 10$) la somme remboursée la n -ième année.

1. Calculer u_2 , c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.
2. Exprimer u_n en fonction de n , pour $1 \leq n \leq 10$. En déduire u_{10} .
3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

<http://question-type-bac.fr>

1. Une augmentation de 2% se traduit par une multiplication par $\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1,02$. Ainsi :

$$u_2 = 1,02 \times u_1 = 612$$

La seconde année, le montant mensuel des remboursements est de 612 euros.

2. Chaque année, ce montant est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1,02$. La suite (u_n) est donc géométrique (pour $1 \leq n \leq 10$); ainsi on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 600 \times 1,02^n$$

On en déduit :

$$u_{10} = 600 \times 1,02^9 \approx 717$$

La dixième année, les mensualités s'élèveront à 717 euros.

3. Nous devons déjà calculer la somme totale remboursée sur l'ensemble des dix années :

$$S = 12(u_1 + u_2 + \dots + u_{10})$$

Nous avons affaire à la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1,02$. Or, la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante :

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Donc :

$$S = 12 \times \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = 12 \times \frac{600(1 - 1,02^{10})}{1 - 1,02} \approx 78838$$

Le coût total du crédit est donc de $78838 - 64000 = 14838$ euros.

Q 5 - Somme des termes d'une suite géométrique

[★★] [34%]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000 + n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0,95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

<http://question-type-bac.fr>

1. Chaque année, la quantité commercialisée est réduite de 5% donc multipliée par 0,95. On a donc, pour tout entier n compris entre 0 et 19 :

$$u_{n+1} = 0,95u_n$$

Autrement dit, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,95$. Par conséquent, on a :

$$u_n = u_0 \times 0,95^n = 80000 \times 0,95^n$$

ceci pour tout n compris entre 0 et 20.

2. L'année 2020 correspond au rang $n = 20$. On calcule donc u_{20} :

$$u_{20} = 80000 \times 0,95^{20}$$

$$u_{20} \approx 28679 \text{ au litre près}$$

En 2020, il sera commercialisé 28679 litres de lait.

3. On peut faire un tableau de valeurs pour répondre à cette question. La suite étant décroissante, on constate facilement que :

$$u_{13} \approx 41067 \text{ et } u_{14} \approx 39014$$

C'est donc à partir de l'année 2014 que la production est réduite de moitié.

On peut également répondre à cette question en résolvant l'inéquation :

$$u_n \leq 40000$$

$$80000 \times 0,95^n \leq 40000$$

$$0,95^n \leq \frac{1}{2}$$

Utilisons le logarithme népérien. Comme c'est une fonction croissante sur \mathbb{R}_+^* , son application aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de cette dernière :

$$\ln((0,95)^n) \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, d'après la propriété $\ln(A^n) = n \ln(A)$, nous obtenons :

$$n \ln(0,95) \leq \ln(0,5)$$

Or, nous savons que $\ln(0,95)$ est **néгатif** puisque 0,95 est compris entre 0 et 1. Par conséquent :

$$n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$$

La calculatrice donne :

$$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \approx 13,51$$

Mais n est un entier donc :

$$n \geq 14$$

C'est donc bien à partir de l'année 2014 que la production est réduite de moitié.

4. Il s'agit de calculer la somme S suivante :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20} = u_0 + u_0 \times q + \dots + u_0 \times q^{20} = u_0(1 + q + \dots + q^{20})$$

Or, la somme des termes d'une suite géométrique, de raison $q \neq 1$, est donnée par la formule suivante :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous obtenons, dans notre cas :

$$S = 80000 \times \frac{1 - 0,95^{21}}{1 - 0,95} \approx 1055101$$

Au total, durant les 21 années (de 2000 jusqu'à 2020) seront commercialisés 1055101 litres de lait.

Q 6 - Démontrer qu'une suite est géométrique

[★★] [75%]

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) les suites définies par :

$$u_n = e^{2n+1}, \quad v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24 \quad \text{et} \quad w_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

<http://question-type-bac.fr>

En cas d'hésitation, il est bon de calculer les premiers termes pour se faire une idée du résultat.

- Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = e^{2(n+1)+1} = e^{2n+3} = e^{2+(2n+1)} = e^2 \times e^{2n+1} = e^2 u_n$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n , on a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^2$.

Deuxième méthode : on peut également écrire directement :

$$u_n = e^{2n+1} = e^{1+2n} = e^1 \times e^{2n} = e(e^2)^n$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^2$ avec $u_0 = e$.

Troisième méthode : comme la suite (u_n) est strictement positive (puisque l'exponentielle l'est), on peut également

montrer que le quotient de deux termes consécutifs est constant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{2(n+1)+1}}{e^{2n+1}} = e^{(2n+3)-(2n+1)} = e^2$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n , on a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^2$.

- On a :

$$v_0 = 24$$

$$v_1 = 48 = 2v_0$$

$$v_2 = 96 = 2v_1$$

$$v_3 = 192 = 2v_2$$

$$v_4 = 384 = 2v_3$$

Cette suite semble vraiment géométrique de raison $q = 2$... Mais :

$$v_5 = 744 \neq 2v_4$$

et donc, finalement, elle ne l'est pas !

- On a :

$$w_0 = -5$$

$$w_1 = -2$$

$$w_2 = 1$$

$$w_3 = 4$$

Cette suite n'est pas géométrique car les rapports $\frac{w_1}{w_0}$ (à savoir $\frac{2}{5}$) et $\frac{w_2}{w_1}$ (à savoir $-\frac{1}{2}$) ne sont pas égaux.

Remarque

En revanche, il semble que cette suite soit *arithmétique* de raison $r = 3$ car il semble que l'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours 3. On peut le prouver, en calculant pour tout entier n , la différence entre deux termes consécutifs :

$$w_{n+1} - w_n = (3(n+1) + 5) - (3n + 5) = 3n + 3 + 5 - 3n - 5 = 3$$

On a donc bien, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = w_n + 3$$

ce qui prouve que cette suite (w_n) est arithmétique.

.....

Découvrez les corrigés détaillés ainsi que des rappels de cours sur notre site :

<http://question-type-bac.fr/nos-documents/>