70 questions « type-bac » **2020**

Série **S** - Mathématiques

Enseignement obligatoire

Énoncés et corrigés

Félicitations !
Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;

4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://question-type-bac.fr/

Table des matières

Suites et récurrence

1.1 Récurrence

Q 1 - Une démonstration de cours sur le logarithme

[★★] [32%]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée ($\star$), valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln\left(A^2\right) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2\ln(A)$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln\left(A^0\right) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant ($\star$) :

$$\ln\left(A^{n+1}\right) = \ln\left(A^n \times A\right) = \ln\left(A^n\right) + \ln(A) = n\ln(A) + \ln(A) = (n+1)\ln(A)$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

3. Dans cette question, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente car n était un entier. Cependant, à l'aide de la propriété ($\star$), on peut écrire :

$$\ln(A) = \ln\left(\sqrt{A} \times \sqrt{A}\right) = \ln\left(\sqrt{A}\right) + \ln\left(\sqrt{A}\right) = 2\ln\left(\sqrt{A}\right)$$

D'où, *via* une division par 2 :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

. . . .

Q 2 - Une suite stationnaire

[★★] [27%]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1$.

1. On a :

$$u_1 = 2u_0^2 + 3u_0 - 4 = 2 \times \frac{25}{4} + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 4 = \frac{25}{2} - \frac{15}{2} - \frac{8}{2} = 1$$

$$u_2 = 2u_1^2 + 3u_1 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

$$u_3 = 2u_2^2 + 3u_2 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

Cette suite semble se stabiliser sur la valeur 1 dès que $n \geqslant 1$. (On dit d'une telle suite qu'elle est *stationnaire*)

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 1$$

- Puisqu'on a $u_1 = 1$, on a $\mathcal{P}(1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 1$).

  Noter que, dans cet exemple, on fait démarrer la récurrence à $n = 1$.
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

  $$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 1$) et héréditaire (pour $n \geqslant 1$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

....

Q 3 - Récurrence sur une somme

[★ ★ ★] [22%]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Notons $\mathcal{P}$ la propriété définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Lorsque $n = 1$, le membre de gauche ci-dessus s'écrit : $1 \times 2 \times 3 = 6$.
Le membre de droite s'écrit : $\frac{1\times2\times3\times4}{4} = 6$.
On a donc $\mathcal{P}(1)$.
Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geqslant 1$, on ait $\mathcal{P}(n)$. Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également $\mathcal{P}(n+1)$, à savoir :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Pour cela, on part de la somme pour k allant de 1 à $(n+1)$ et on isole son dernier terme de façon à faire apparaître la somme pour k allant de 1 à n ce qui nous permettra d'utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

Et comme on a supposé $\mathcal{P}(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

On réduit au même dénominateur et on factorise :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Ce qui correspond bien à $\mathcal{P}(n+1)$.

En conclusion, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a bien :

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Remarque

On montre, de la même façon, que :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

et on peut également généraliser cette relation, pour $p \geqslant 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+p) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p+1)}{p+2}$$

....

Q 4 - Comparaison entre n^2 et 2^n

[⋆⋆⋆] [18%]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier que l'on précisera, on a :

$$n^2 \leqslant 2^n$$

Notons $\mathcal{P}$, la propriété définie par :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$$

L'énoncé ne nous fournit pas la valeur de l'entier n_0 pour lequel cette propriété est initialisée. Calculons les premières valeurs de n^2 et 2^n afin d'émettre une conjecture.

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32

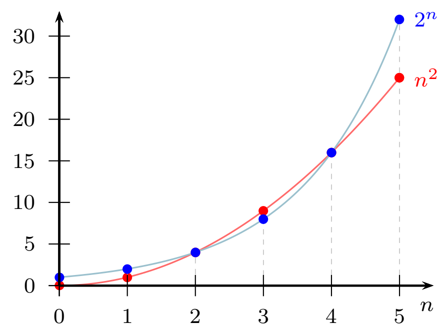

FIGURE 1.1 – Comparaison entre n^2 et 2^n.

On constate que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ mais pas pour $n = 3$ puis redevient vraie pour $n = 4$ et semble-t-il définitivement. Nous allons donc initialiser notre récurrence pour $n_0 = 4$.

On a donc, bien sûr, $\mathcal{P}(4)$ d'après le tableau ci-dessus.

Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geqslant 4$, on ait $n^2 \leqslant 2^n$. Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Élaborons une déduction en partant du développement de $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ que nous allons majorer étapes par étapes (d'autres façons de raisonner sont possibles !). Nous pouvons écrire :

car $4 \leqslant n$

$$(n+1)^2 \leqslant n^2+2n+2 \leqslant n^2+2n+2n \leqslant n^2+4n \leqslant n^2+n^2 \leqslant 2n^2 \leqslant 2\times 2^n \leqslant 2^{n+1}$$

car $n \geqslant 4$ (et donc $n \geqslant 1$) car on a supposé $\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$

On obtient ainsi $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc prouvé que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 4. Comme, par ailleurs, elle est vraie au rang 4, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 4$.
Conclusion :

pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a bien : $n^2 \leqslant 2^n$

. . . .

1.2 Suites géométriques

Q 5 - Calcul du coût total d'un crédit [★★] [20%]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12\times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) la somme remboursée la n-ième année.

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$. En déduire u_{10}.

3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

1. Une augmentation de 2% se traduit par une multiplication par $\left(1+\frac{2}{100}\right) = 1{,}02$. Ainsi :

$$u_2 = 1{,}02 \times u_1 = 7344$$

La seconde année, la somme remboursée est de 7344 euros (ce qui fait une mensualité de 612 euros).

2. Chaque année, ce montant est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1{,}02$. La suite (u_n) est donc géométrique (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) ; ainsi on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 7200 \times 1{,}02^n$$

On en déduit :

$$u_{10} = 7200 \times 1{,}02^9 \approx 8605$$

La dixième année, la somme remboursée est de 8605 euros (soit une mensualité de 717 euros environ).

3. Nous devons déjà calculer la somme totale remboursée sur l'ensemble des dix années :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$

Nous avons affaire à la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$. Or, la somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique (de terme initial u_1) est donnée par la formule suivante :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \frac{u_1\left(1-q^N\right)}{1-q}$$

Donc :

$$S = \frac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q} = \frac{7200\left(1-1{,}02^{10}\right)}{1-1{,}02} \approx 78838$$

Le coût total du crédit est donc de $78838 - 64000 = 14838$ euros.

Q 6 - Somme des termes d'une suite géométrique

[★★] [34%]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000+n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0{,}95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

1. Chaque année, la quantité commercialisée est réduite de 5% donc multipliée par 0,95. On a donc, pour tout entier n compris entre 0 et 19 :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n$$

Autrement dit, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$. Par conséquent, on a :

$$u_n = u_0 \times 0{,}95^n = 80000 \times 0{,}95^n$$

ceci pour tout n compris entre 0 et 20.

2. L'année 2020 correspond au rang $n = 20$. On calcule donc u_{20} :

$$u_{20} = 80000 \times 0{,}95^{20}$$

$$u_{20} \approx 28679 \text{ au litre près}$$

En 2020, il sera commercialisé 28679 litres de lait.

3. On peut faire un tableau de valeurs pour répondre à cette question. La suite étant décroissante, on constate facilement que :

$$u_{13} \approx 41067 \text{ et } u_{14} \approx 39014$$

C'est donc à partir de l'année 2014 que la production est réduite de moitié.

On peut également répondre à cette question en résolvant l'inéquation :

$$u_n \leqslant 40000$$

$$80000 \times 0{,}95^n \leqslant 40000$$

$$0{,}95^n \leqslant \frac{1}{2}$$

Utilisons le logarithme népérien. Comme c'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, son application aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de cette dernière :

$$\ln\big((0{,}95)^n\big) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, d'après la propriété $\ln\big(A^n\big) = n\ln(A)$, nous obtenons :

$$n\ln(0{,}95) \leqslant \ln(0{,}5)$$

Or, nous savons que $\ln(0{,}95)$ est **négatif** puisque 0,95 est compris entre 0 et 1. Par conséquent :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}$$

La calculatrice donne :

$$\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \approx 13{,}51$$

Mais n est un entier donc :

$$n \geqslant 14$$

C'est donc bien à partir de l'année 2014 que la production est réduite de moitié.

4. Il s'agit de calculer la somme S suivante :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = u_0 + u_0 \times q + \cdots + u_0 \times q^{20} = u_0\big(1 + q + \cdots + q^{20}\big)$$

Or, la somme des termes d'une suite géométrique, de raison $q \neq 1$, est donnée par la formule suivante :

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous obtenons, dans notre cas :

$$S = 80000 \times \frac{1 - 0{,}95^{21}}{1 - 0{,}95} \approx 1055101$$

Au total, durant les 21 années (de 2000 jusqu'à 2020) seront commercialisés 1055101 litres de lait.

....

Q 7 - Démontrer qu'une suite est géométrique

[★★] [75%]

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) les suites définies par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1} \quad , \quad v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24 \quad , \quad w_n = \cos(n\pi) \quad \text{et} \quad t_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

En cas d'hésitation, il est bon de calculer les premiers termes pour se faire une idée du résultat.

- Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{2(n+1)+1} = \mathrm{e}^{2n+3} = \mathrm{e}^{2+(2n+1)} = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^2 u_n$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^2$.

Deuxième méthode : on peut également écrire directement :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^{1+2n} = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{2n} = \mathrm{e}\big(\mathrm{e}^2\big)^n$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^2$ avec $u_0 = \mathrm{e}$.

Troisième méthode : comme la suite (u_n) est strictement positive (puisque l'exponentielle l'est), on peut également montrer que le quotient de deux termes consécutifs est constant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}^{2(n+1)+1}}{\mathrm{e}^{2n+1}} = \mathrm{e}^{(2n+3)-(2n+1)} = \mathrm{e}^2$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^2$.

- On a :

$$v_0 = 24$$

$$v_1 = 48 = 2v_0$$

$$v_2 = 96 = 2v_1$$

$$v_3 = 192 = 2v_2$$

$$v_4 = 384 = 2v_3$$

Cette suite semble vraiment géométrique de raison $q = 2$... Mais :

$$v_5 = 744 \neq 2v_4$$

et donc, finalement, elle ne l'est pas !

- On a :

$$w_0 = \cos(0) = 1$$

$$w_1 = \cos(\pi) = -1$$

$$w_2 = \cos(2\pi) = 1$$

Cette suite semble géométrique de raison -1. Évaluons w_{n+1} :

$$w_{n+1} = \cos\big((n+1)\pi\big) = \cos(n\pi + \pi) = -\cos(n\pi) = -w_n$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on a donc prouvé que la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -1$.

Note : on a utilisé la relation $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ (angles associés).

Remarque

Les formules sur les angles associés peuvent se retrouver facilement grâce au cercle trigonométrique :

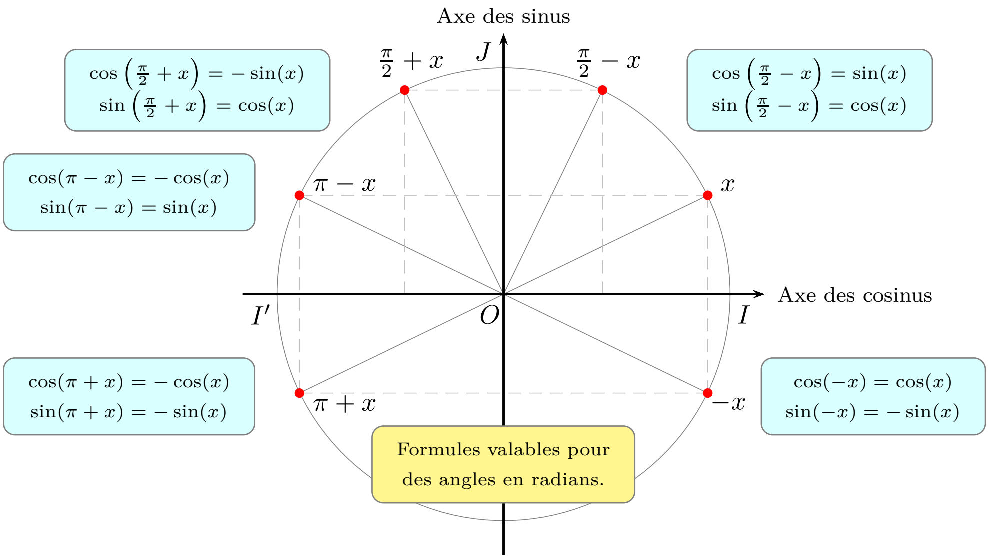

FIGURE 1.2 – Angles associés.

- On a :

$$t_0 = -5$$

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = 1$$

$$t_3 = 4$$

Cette suite n'est pas géométrique car les rapports $\frac{t_1}{t_0}$ (à savoir $\frac{2}{5}$) et $\frac{t_2}{t_1}$ (à savoir $-\frac{1}{2}$) ne sont pas égaux.

Remarque

En revanche, il semble que cette suite soit *arithmétique* de raison $r = 3$ car il semble que l'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours 3. On peut le prouver, en calculant pour tout entier n, la différence entre deux termes consécutifs :

$$t_{n+1} - t_n = \big(3(n+1)+5\big) - (3n+5) = 3n+3+5-3n-5 = 3$$

On a donc bien, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = t_n + 3$$

ce qui prouve que cette suite (t_n) est arithmétique.

....