68 questions « type-bac » **2019**

Série **S** - Mathématiques

Enseignement obligatoire

Énoncés et corrigés - Avec rappels de cours

Félicitations !
Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles. Il n'est donc pas nécessaire de lire ce document de façon linéaire du début à la fin, vous commencerez là où vous le voudrez ;

4. les solutions des exercices sont rédigées afin de correspondre parfaitement à ce qu'il faudrait, idéalement, noter sur une copie de baccalauréat ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://question-type-bac.fr/

Table des matières

1 Suites et récurrence **4**

1.1 Récurrence 5

1.2 Suites géométriques 9

1.3 Étude de suites (monotonie, convergence, formule explicite) 17

1.4 Utiliser une suite auxiliaire 25

2 Limites et asymptotes **27**

2.1 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles 28

2.2 Formes indéterminées 29

2.3 Utilisation d'un théorème de comparaison 34

3 Continuité et dérivabilité **37**

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection) 37

3.2 Étudier la dérivabilité d'une fonction 41

3.3 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction 42

3.4 Problèmes nécessitant deux dérivations successives 43

3.5 Équation de la tangente 45

3.6 Lectures graphiques 49

4 Fonctions exponentielles et logarithmes **52**

4.1 Résoudre une (in)équation 52

4.2 Étude de fonctions 56

4.3 Avec des suites 60

5 Nombres complexes **62**

5.1 Equations du second degré 62

5.2 Nombre complexe conjugué 64

5.3 Module et argument(s) d'un nombre complexe 66

5.4 Nombres complexes et géométrie 72

6 Géométrie dans l'espace **75**

6.1 Equations cartésiennes des plans de l'espace 75

6.2 Droites de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques 77

6.3 Plans de l'espace - Systèmes d'équations paramétriques 81

6.4 Problèmes divers et problèmes d'incidence 84

7 Calcul intégral **89**

7.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive 89

7.2 Calcul de l'aire d'un secteur 92

7.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction 94

7.4 Intégrales et suites 96

8 Probabilités conditionnelles - Indépendance **98**
8.1 Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales . . . 98
8.2 Indépendance d'événements . . . 100
8.3 Probabilités et suites . . . 103

9 Lois de probabilités **105**
9.1 Lois discrètes . . . 105
9.1.1 Lois discrètes quelconques . . . 105
9.1.2 Lois binomiales . . . 108
9.2 Lois à densité . . . 113
9.2.1 Lois uniformes . . . 114
9.2.2 Lois normales . . . 116
9.2.3 Lois exponentielles . . . 131

10 Intervalles de fluctuation et de confiance **134**

11 Annexe : formulaire sur les dérivées **138**

Index **139**

Suites et récurrence

À QUOI ÇA SERT ?

Les suites permettent de modéliser l'évolution de certains phénomènes : par exemple l'évolution d'un capital placé au cours des années (formule $C_n = C_0(1+i)^n$ où i est le taux d'intérêt), ou encore l'évolution d'une probabilité p_n par rapport à certaines unités de temps, ou encore traduire certaines propriétés mathématiques : la suite des entiers impairs $(2n-1)$ ou $(2n+1)$, des carrés (n^2) des puissances de 2 à savoir (2^n), etc. On utilise pour cela la notation indicielle (avec la lettre u ou une autre, peu importe) : u_0 est généralement la valeur initiale (parfois u_1) et u_n désigne la valeur à la n-ième étape du processus (ou terme de rang n). Le successeur du terme u_n est alors noté u_{n+1}. Et le successeur de u_{n+1} est alors u_{n+2}. Un exemple célèbre est la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ puis pour tout $n \geqslant 0$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Chaque terme s'obtient en faisant la somme des deux précédents.
On obtient alors $u_2 = u_1 + u_0 = 1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$ etc.
Contrairement aux fonctions pour lesquelles la variable x est un réel, dans les suites, la variable n est un entier naturel. Une suite est en fait une fonction définie sur $\mathbb{N}$. La plupart des suites sont « quelconques » mais certaines ont des propriétés spécifiques :
○ suites arithmétiques : on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r : $u_{n+1} = u_n + r$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 + nr$ (on passe de u_0 à u_n en ajoutant n fois la raison r) ;
○ suites géométriques : on passe de chaque terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité q : $u_{n+1} = u_n \times q$. La formule explicite est alors $u_n = u_0 \times q^n$ (on passe de u_0 à u_n en multipliant n fois par la raison q) ;
○ suites croissantes : chaque terme est inférieur au suivant : $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$;
○ etc.
Comme on l'a vu ci-dessus, certaines suites sont définies de façon « explicite » comme par exemple $u_n = n^2 + 3$. Dans ce cas, on peut immédiatement calculer n'importe quel terme de la suite (par exemple $u_5 = 28$) mais on ne saisit pas forcément le lien entre deux termes successifs. D'autres suites sont définies par « récurrence » (de proche en proche) comme par exemple $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ (on donne la valeur d'un terme initial puis une formule donnant chaque terme qui se définit à partir du (ou des) précédent(s)). Dans ce cas, on voit le *lien* entre les termes (on passe d'un terme au suivant en ajoutant les entiers impairs successifs) mais on ne peut pas calculer immédiatement n'importe quel terme de la suite. Souvent, dans les exercices, on doit passer d'une écriture à l'autre. Par exemple en partant de la formule explicite $u_n = n^2 + 3$ on peut chercher une relation de récurrence. Pour cela on ré-écrit la formule en remplaçant u_n par u_{n+1} :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 = u_n + 2n + 1$$

Pour passer de la relation de récurrence à la formule explicite, c'est plus délicat... sauf si on a réussit à conjecturer la formule...

1.1 Récurrence

À QUOI ÇA SERT ?

Le principe de raisonnement par récurrence permet de démontrer des propriétés qui sont **indexées par un entier** n telles que par exemple :

$$11^n + 9 \text{ est un multiple de 10 quel que soit l'entier naturel } n$$

Pour démontrer une telle propriété, on ne va pas s'amuser à vérifier qu'elle est vraie pour $n = 0$, puis pour $n = 1$ puis pour $n = 2$ etc. On ne peut pas faire une infinité de vérifications ! En revanche, si on arrive à démontrer que la propriété est *héréditaire* alors il suffira de prouver qu'elle est vraie « au départ » pour en déduire qu'elle vraie à tout rang n. Dans notre exemple, l'hérédité est simple à prouver car on a toujours :

$$11^{n+1} + 9 = 11^n \times 11 + 9 = 11^n \times (10 + 1) + 9 = 11^n \times 10 + 11^n + 9$$

Ce calcul montre simplement « qu'on passe » de $11^n + 9$ à $11^{n+1} + 9$ en ajoutant $11^n \times 10$ qui est justement un multiple de 10. Ainsi, si on suppose que pour un certain n arbitrairement fixé, $11^n + 9$ est un multiple de 10 alors il en sera de même pour $11^{n+1} + 9$. C'est l'hérédité. Et comme la propriété est vraie pour $n = 10$ (car $11^0 + 9 = 10$) alors elle est vraie à tout rang n.

Le raisonnement par récurrence est très utile pour l'étude de certaines suites (lorsqu'on connaît le processus qui permet de passer d'un terme u_n au suivant u_{n+1}) notamment le sens de variation (croissance ou décroissance de la suite), ou la preuve de l'existence d'un majorant M (resp. d'un minorant m).

Pour plus de détails sur ce sujet, voir : http://question-type-bac.fr/comment-bien-mener-et-rediger-une-recurrence-en-mathematiques/

RAPPEL DE COURS

Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N}$.

SI :

- la propriété $\mathcal{P}$ est INITIALISÉE à un certain rang n_0, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}$$ [1]

- la propriété $\mathcal{P}$ est HÉRÉDITAIRE à partir du rang n_0, c'est-à-dire :

$$\text{pour } n \geqslant n_0, \ \Big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\Big)$$

ALORS : La propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout rang n plus grand que n_0.

En pratique, on rédige une récurrence en suivant les quatre étapes ci-dessous :

1. on énonce la propriété de travail $\mathcal{P}(n)$;

2. on vérifie l'initialisation en examinant si l'on a $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$ ou $\mathcal{P}(n_0)$ selon le cas) ;

3. on vérifie l'hérédité. Pour cela, on suppose $\mathcal{P}(n)$ **pour un certain entier** n (vérifiant $n \geqslant n_0$) et on en déduit la propriété au rang suivant, c'est-à-dire $\mathcal{P}(n+1)$;

4. on conclut en affirmant que l'on a ainsi démontré que, pour tout entier n (vérifiant $n \geqslant n_0$), on a $\mathcal{P}(n)$.

1. On peut se contenter de dire « $\mathcal{P}(n_0)$ » au lieu de « $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ». Qui dit, au quotidien, lorsqu'il pleut : « il pleut est vrai » au lieu de « il pleut » ! ?

Q 1 - Une démonstration de cours sur le logarithme

[★★] [32%]

On rappelle la propriété suivante du logarithme, notée $(\star)$, valable pour toutes quantités A et B strictement positives :

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B) \quad (\star)$$

1. À l'aide de la propriété ci-dessus, démontrer que pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(A^2\right) = 2\ln(A)$$

2. En déduire, par récurrence, que pour tout A strictement positif et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

3. Démontrer que, pour tout A strictement positif :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

http://question-type-bac.fr

1. Il suffit de remplacer B par A pour obtenir :

$$\ln\left(A^2\right) = \ln(A \times A) = \ln(A) + \ln(A) = 2\ln(A)$$

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$$

- Lorsque $n = 0$, on a $A^0 = 1$ donc $\ln\left(A^0\right) = \ln(1) = 0$ ce qui est bien égal à $0 \times \ln(A)$. On a donc $\mathcal{P}(0)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$).
- Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n)$: $\ln\left(A^n\right) = n\ln(A)$ qui est satisfaite. Alors, sous cette hypothèse, on obtient en utilisant $(\star)$:

$$\ln\left(A^{n+1}\right) = \ln\left(A^n \times A\right) = \ln\left(A^n\right) + \ln(A) = n\ln(A) + \ln(A) = (n+1)\ln(A)$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 0$) et héréditaire (pour $n \in \mathbb{N}$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

3. Dans cette question, on ne peut pas utiliser le résultat de la question précédente car n était un entier. Cependant, à l'aide de la propriété $(\star)$, on peut écrire :

$$\ln(A) = \ln\left(\sqrt{A} \times \sqrt{A}\right) = \ln\left(\sqrt{A}\right) + \ln\left(\sqrt{A}\right) = 2\ln\left(\sqrt{A}\right)$$

D'où, *via* une division par 2 :

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

....

Q 2 - Une suite stationnaire

[★★] [27%]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -\frac{5}{2}$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1$.

http://question-type-bac.fr

1. On a :

$$u_1 = 2u_0^2 + 3u_0 - 4 = 2 \times \frac{25}{4} + 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 4 = \frac{25}{2} - \frac{15}{2} - \frac{8}{2} = 1$$

$$u_2 = 2u_1^2 + 3u_1 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

$$u_3 = 2u_2^2 + 3u_2 - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

Cette suite semble se stabiliser sur la valeur 1 dès que $n \geqslant 1$. (On dit d'une telle suite qu'elle est *stationnaire*)

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 1$$

- Puisqu'on a $u_1 = 1$, on a $\mathcal{P}(1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 1$).

  ⚠ Noter que, dans cet exemple, on fait démarrer la récurrence à $n = 1$.
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 1$, on ait effectivement la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 1$ qui est satisfaite. Alors, sous cette condition, on a :

  $$u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n - 4 = 2 + 3 - 4 = 1$$

  Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. La propriété $\mathcal{P}$ est donc héréditaire.

On a vérifié que la propriété $\mathcal{P}$ est initialisée (pour $n = 1$) et héréditaire (pour $n \geqslant 1$), elle sera donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ ce qui démontre bien ce qu'on voulait.

....

Q 3 - Récurrence sur une somme

[★★★] [22%]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Notons $\mathcal{P}$ la propriété définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Lorsque $n = 1$, le membre de gauche ci-dessus s'écrit : $1 \times 2 \times 3 = 6$.

Le membre de droite s'écrit : $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 6$.

On a donc $\mathcal{P}(1)$.

Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geqslant 1$, on ait $\mathcal{P}(n)$. Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également $\mathcal{P}(n+1)$, à savoir :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Pour cela, on part de la somme pour k allant de 1 à $(n+1)$ et on isole son dernier terme de façon à faire apparaître la somme pour k allant de 1 à n ce qui nous permettra d'utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$$

Et comme on a supposé $\mathcal{P}(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

On réduit au même dénominateur et on factorise :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

Ce qui correspond bien à $\mathcal{P}(n+1)$.
En conclusion, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a bien :

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Remarque

On montre, de la même façon, que :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

et on peut également généraliser cette relation, pour $p \geqslant 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+p) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+p+1)}{p+2}$$

. . . .

Q 4 - Comparaison entre n^2 et 2^n

[★★★] [18%]

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ où n_0 est un entier que l'on précisera, on a :

$$n^2 \leqslant 2^n$$

http://question-type-bac.fr

Notons $\mathcal{P}$, la propriété définie par :

$$\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$$

L'énoncé ne nous fournit pas la valeur de l'entier n_0 pour lequel cette propriété est initialisée. Calculons les premières valeurs de n^2 et 2^n afin d'émettre une conjecture.

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	9	16	25
2^n	1	2	4	8	16	32

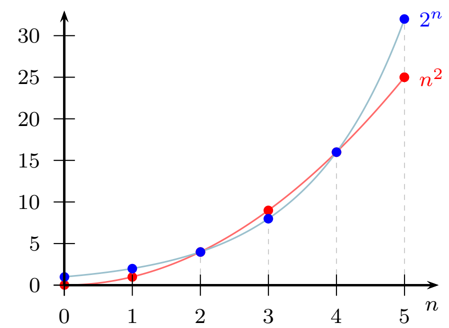

FIGURE 1.1 – Comparaison entre n^2 et 2^n.

On constate que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ mais pas pour $n = 3$ puis redevient vraie pour $n = 4$ et semble-t-il définitivement. Nous allons donc initialiser notre récurrence pour $n_0 = 4$.
On a donc, bien sûr, $\mathcal{P}(4)$ d'après le tableau ci-dessus.
Supposons maintenant que, pour un certain entier naturel $n \geqslant 4$, on ait $n^2 \leqslant 2^n$. Alors, sous cette condition, notre objectif va être d'en déduire que l'on a également $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Élaborons une déduction en partant du développement de $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ que nous allons majorer étapes par étapes (d'autres façons de raisonner sont possibles !). Nous pouvons écrire :

car $4 \leqslant n$

$$(n+1)^2 \leqslant n^2 + 2n + 2 \leqslant n^2 + 2n + 2n \leqslant n^2 + 4n \leqslant n^2 + n^2 \leqslant 2n^2 \leqslant 2 \times 2^n \leqslant 2^{n+1}$$

car $n \geqslant 4$ (et donc $n \geqslant 1$)

car on a supposé $\mathcal{P}(n) : n^2 \leqslant 2^n$

On obtient ainsi $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$. On a donc prouvé que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 4. Comme, par ailleurs, elle est vraie au rang 4, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 4$.
Conclusion :

$$\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 4, \text{ on a bien : } n^2 \leqslant 2^n$$

. . . .

1.2 Suites géométriques

RAPPEL DE COURS

Suite géométrique

Une suite (u_n) est dite *géométrique* lorsqu'on passe de chacun de ses termes au suivant en multipliant toujours par la même quantité q, appelée *raison*. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Dans le cas d'une suite géométrique, on peut alors exprimer n'importe quel terme u_n en fonction du rang n *via* la relation :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Variante : $$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Et plus généralement encore : $$u_n = u_k \times q^{n-k}$$

La somme des $n+1$ premiers termes consécutifs d'une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule suivante :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_0\left(1 - q^{n+1}\right)}{1-q}$$

En particulier (lorsque $u_0 = 1$) :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

⚠ Les formules de somme ci-dessus sont valables lorsque la sommation s'effectue à partir de u_0 et jusqu'à u_n (ce qui fait $n+1$ termes). Dans les autres cas, on recommande la formule suivante :

$$u_k + u_{k+1} + \cdots + u_n = \frac{P\left(1 - q^N\right)}{1-q}$$

où P est le premier terme de la somme et N le nombre de termes de la somme (ici $N = n - k + 1$).

Q 5 - Calcul du coût total d'un crédit

[★★] [20%]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) la somme remboursée la n-ième année.

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$. En déduire u_{10}.

3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

1. Une augmentation de 2% se traduit par une multiplication par $\left(1+\frac{2}{100}\right)=1{,}02$. Ainsi :

$$u_2 = 1{,}02 \times u_1 = 7344$$

La seconde année, la somme remboursée est de 7344 euros (ce qui fait une mensualité de 612 euros).

2. Chaque année, ce montant est multiplié par le même nombre, à savoir $q = 1{,}02$. La suite (u_n) est donc géométrique (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) ; ainsi on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 7200 \times 1{,}02^n$$

On en déduit :

$$u_{10} = 7200 \times 1{,}02^9 \approx 8605$$

La dixième année, la somme remboursée est de 8605 euros (soit une mensualité de 717 euros environ).

3. Nous devons déjà calculer la somme totale remboursée sur l'ensemble des dix années :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$$

Nous avons affaire à la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$. Or, la somme de N termes consécutifs d'une suite géométrique (de terme initial u_1) est donnée par la formule suivante :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \frac{u_1\left(1-q^N\right)}{1-q}$$

Donc :

$$S = \frac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q} = \frac{7200\left(1-1{,}02^{10}\right)}{1-1{,}02} \approx 78838$$

Le coût total du crédit est donc de $78838 - 64000 = 14838$ euros.

....

RAPPEL DE COURS

Résolution d'(in)équations dont l'inconnue est en exposant

Pour résoudre une équation du type $a^n = b$ ou une inéquation du type $a^n \geqslant b$ où a et b sont des réels strictement positifs ($a \neq 1$) et n un entier inconnu, l'idée est d'utiliser **la fonction logarithme**. En effet, grâce à la relation $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$, il y a moyen de simplifier l'équation. L'équation $a^n = b$ devient alors :

$$\ln\left(a^n\right) = \ln(b)$$

$$n\ln(a) = \ln(b)$$

$$n = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

On procède de même pour résoudre l'inéquation.

Attention pour les inéquations ! Lorsqu'on divise par $\ln(a)$, bien songer que ce nombre peut très bien être négatif (cela se produit lorsque $a \in]0\,,1[$) ; il faut alors changer le sens de l'inégalité. Par exemple :

$$0{,}9^n \leqslant 0{,}5$$

$$\ln\left(0{,}9^n\right) \leqslant \ln(0{,}5)$$

$$n\ln(0{,}9) = \ln(0{,}5)$$

Mais $\ln(0{,}9) < 0$ donc :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)}$$

Et comme n est entier :

$$n \geqslant 7$$

Q 6 - Somme des termes d'une suite géométrique

[★★] [34%]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000+n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0{,}95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

1. Chaque année, la quantité commercialisée est réduite de 5% donc multipliée par 0,95. On a donc, pour tout entier n compris entre 0 et 19 :

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n$$

Autrement dit, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$. Par conséquent, on a :

$$u_n = u_0 \times 0{,}95^n = 80000 \times 0{,}95^n$$

ceci pour tout n compris entre 0 et 20.

2. L'année 2020 correspond au rang $n = 20$. On calcule donc u_{20} :

$$u_{20} = 80000 \times 0{,}95^{20}$$

$$u_{20} \approx 28679 \text{ au litre près}$$

En 2020, il sera commercialisé 28679 litres de lait.

3. On peut faire un tableau de valeurs pour répondre à cette question. La suite étant décroissante, on constate facilement que :

$$u_{13} \approx 41067 \text{ et } u_{14} \approx 39014$$

C'est donc à partir de l'année 2014 que la production est réduite de moitié.

On peut également répondre à cette question en résolvant l'inéquation :

$$u_n \leqslant 40000$$

$$80000 \times 0{,}95^n \leqslant 40000$$

$$0{,}95^n \leqslant \frac{1}{2}$$

Utilisons le logarithme népérien. Comme c'est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, son application aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de cette dernière :

$$\ln\big((0{,}95)^n\big) \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, d'après la propriété $\ln\big(A^n\big) = n\ln(A)$, nous obtenons :

$$n\ln(0{,}95) \leqslant \ln(0{,}5)$$

Or, nous savons que ln(0,95) est **négatif** puisque 0,95 est compris entre 0 et 1. Par conséquent :

$$n \geqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}$$

La calculatrice donne :

$$\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)} \approx 13{,}51$$

Mais n est un entier donc :

$$n \geqslant 14$$

C'est donc bien à partir de l'année 2014 que la production est réduite de moitié.

4. Il s'agit de calculer la somme S suivante :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = u_0 + u_0 \times q + \cdots + u_0 \times q^{20} = u_0\left(1 + q + \cdots + q^{20}\right)$$

Or, la somme des termes d'une suite géométrique, de raison $q \neq 1$, est donnée par la formule suivante :

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Nous obtenons, dans notre cas :

$$S = 80000 \times \frac{1 - 0{,}95^{21}}{1 - 0{,}95} \approx 1055101$$

Au total, durant les 21 années (de 2000 jusqu'à 2020) seront commercialisés 1055101 litres de lait.

....

RAPPEL DE COURS

Démontrer qu'une suite est géométrique (ou non)

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut, au choix ou selon le contexte, utiliser l'une des trois méthodes ci-dessous :

- écrire directement u_n sous la forme aq^n.
  On en déduit que la suite est géométrique de raison q avec $u_0 = a$;
- exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et montrer ainsi que u_{n+1} est toujours le même multiple de u_n ;
- si on sait que u_n ne s'annule jamais, on peut calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et montrer qu'il est constant.

Pour démontrer qu'une suite (u_n) n'est pas géométrique, il suffit d'examiner les premiers termes et de constater qu'on ne passe pas de l'un au suivant en multipliant toujours par le même nombre.

Q 7 - Démontrer qu'une suite est géométrique

[★★] [75%]

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) les suites définies par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1} \;\; , \;\; v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24 \;\; , \;\; w_n = \cos(n\pi) \;\; \text{et} \;\; t_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

En cas d'hésitation, il est bon de calculer les premiers termes pour se faire une idée du résultat.

- Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{2(n+1)+1} = \mathrm{e}^{2n+3} = \mathrm{e}^{2+(2n+1)} = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^2 u_n$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^2$.

Deuxième méthode : on peut également écrire directement :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1} = \mathrm{e}^{1+2n} = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{2n} = \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^2\right)^n$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^2$ avec $u_0 = \mathrm{e}$.

Troisième méthode : comme la suite (u_n) est strictement positive (puisque l'exponentielle l'est), on peut également montrer que le quotient de deux termes consécutifs est constant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}^{2(n+1)+1}}{\mathrm{e}^{2n+1}} = \mathrm{e}^{(2n+3)-(2n+1)} = \mathrm{e}^2$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on a donc prouvé que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^2$.

- On a :

$$v_0 = 24$$

$$v_1 = 48 = 2v_0$$

$$v_2 = 96 = 2v_1$$

$$v_3 = 192 = 2v_2$$

$$v_4 = 384 = 2v_3$$

Cette suite semble vraiment géométrique de raison $q = 2$... Mais :

$$v_5 = 744 \neq 2v_4$$

et donc, finalement, elle ne l'est pas !

- On a :

$$w_0 = \cos(0) = 1$$

$$w_1 = \cos(\pi) = -1$$

$$w_2 = \cos(2\pi) = 1$$

Cette suite semble géométrique de raison -1. Évaluons w_{n+1} :

$$w_{n+1} = \cos\big((n+1)\pi\big) = \cos(n\pi + \pi) = -\cos(n\pi) = -w_n$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, on a donc prouvé que la suite (w_n) est géométrique de raison $q = -1$.

Note : on a utilisé la relation $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ (angles associés).

Remarque

Les formules sur les angles associés peuvent se retrouver facilement grâce au cercle trigonométrique :

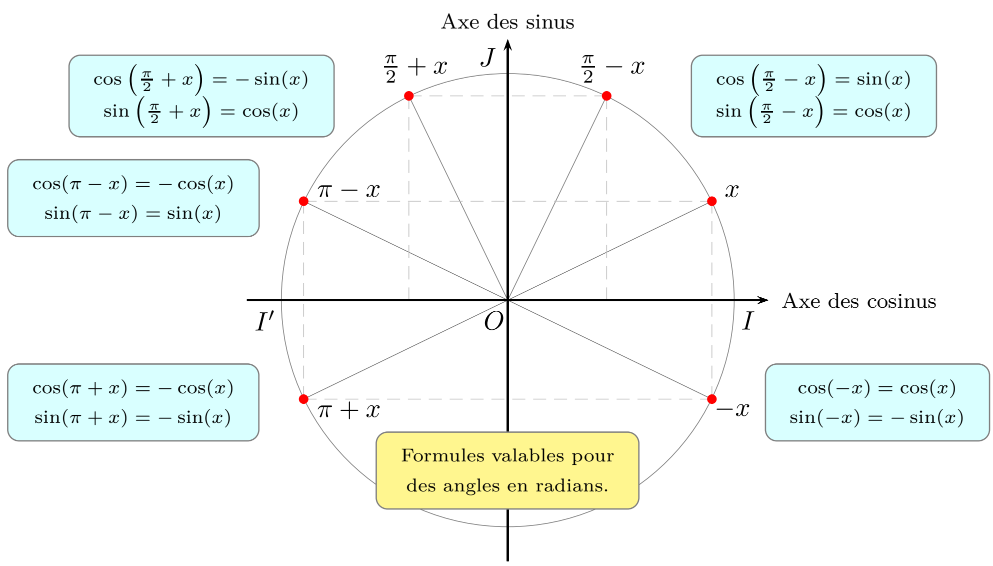

FIGURE 1.2 – Angles associés.

- On a :

$$t_0 = -5$$

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = 1$$

$$t_3 = 4$$

Cette suite n'est pas géométrique car les rapports $\frac{t_1}{t_0}$ (à savoir $\frac{2}{5}$) et $\frac{t_2}{t_1}$ (à savoir $-\frac{1}{2}$) ne sont pas égaux.

Remarque

En revanche, il semble que cette suite soit *arithmétique* de raison $r = 3$ car il semble que l'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours 3. On peut le prouver, en calculant pour tout entier n, la différence entre deux termes consécutifs :

$$t_{n+1} - t_n = \big(3(n+1)+5\big) - (3n+5) = 3n+3+5-3n-5 = 3$$

On a donc bien, pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = t_n + 3$$

ce qui prouve que cette suite (t_n) est arithmétique.

. . . .

Découvrez les corrigés détaillés ainsi que des rappels de cours sur notre site :

http://question-type-bac.fr/nos-documents/