42 questions « type-bac » **2019**

Série **ES** - Mathématiques

Enseignement obligatoire

Énoncés seuls

Félicitations !
Ce document va vous aider à préparer votre baccalauréat en un minimum de temps et avec un maximum d'efficacité ! Vous avez fait le bon choix !

Remarques importantes :

1. ces exercices sont ni spécialement difficiles, ni spécialement faciles mais parfaitement adaptés et conçus pour une préparation optimale pour le bac. L'objectif principal est de vous faire progresser le plus vite ;

2. ces exercices ne sont pas spécialement longs. Même si certains prolongements seraient possibles, leur nombre de questions est volontairement limité afin de cibler au plus juste chaque notion importante ;

3. ces exercices ne sont pas classés par degré de difficulté mais par thèmes et sous-thèmes. Vous pouvez ainsi directement travailler vos points faibles ;

4. nous rappelons que le jour du baccalauréat, **les méthodes de raisonnement ainsi que la qualité de la rédaction utilisées par le candidat entrent dans une part importante de l'évaluation** ;

5. n'hésitez-pas à venir (re)visiter notre site ci-dessous pour trouver les dernières versions de nos documents et également découvrir nos autres productions.

http://question-type-bac.fr/

Table des matières

Suites

1.1 Suites géométriques

Q 1 - Suite géométrique et pourcentages [⋆]

Un étudiant paye un loyer mensuel de 400 euros pour sa location. Chaque année, son propriétaire augmente le loyer de 7%. On note u_n le loyer mensuel après n années, ainsi $u_0 = 400$.

1. Calculer u_1, c'est-à-dire le montant du loyer mensuel après une année.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Après 6 années, le montant du loyer mensuel a augmenté de :

☐ 42% ☐ 50% ☐ 13%

(On cochera la réponse la plus proche du résultat exact)

Q 2 - Calcul du coût total d'un crédit [⋆⋆]

Pour l'achat d'une maison, un couple souscrit un prêt immobilier sur 10 années dont les mensualités sont évolutives. La première année, les mensualités sont fixées à 600 euros. Mais chaque année, ces mensualités augmentent de 2%. On note u_1 la somme remboursée la première année (ainsi $u_1 = 12 \times 600 = 7200$) et plus généralement u_n (pour $1 \leqslant n \leqslant 10$) la somme remboursée la n-ième année.

1. Calculer u_2, c'est-à-dire la somme remboursée la deuxième année.

2. Exprimer u_n en fonction de n, pour $1 \leqslant n \leqslant 10$. En déduire u_{10}.

3. Sachant que la somme initialement empruntée par ce couple est de 64000 euros, quel est le coût total de ce crédit ?

Q 3 - Somme des termes d'une suite géométrique [⋆⋆]

Un éleveur de vaches laitières commercialisait, en l'an 2000, 80000 litres de lait. Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société prévoit que cette quantité doit être réduite de 5% par an, jusqu'en 2020. On note u_n le nombre de de litre de laits commercialisés durant l'année $(2000 + n)$ ainsi $u_0 = 80000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n compris entre 0 et 20, on a :

$$u_n = 80000 \times 0{,}95^n$$

2. Combien de litres de lait seront commercialisés en 2020 ? (On arrondira au litre entier le plus proche)

3. Déterminer à partir de quelle année le nombre de litres de lait commercialisés sera réduit de moitié par rapport à l'année 2000.

4. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2000 et l'année 2020. (On arrondira au nombre entier de litres le plus proche)

Q 4 - Démontrer qu'une suite est géométrique [⋆⋆]

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) les suites définies par :

$$u_n = \mathrm{e}^{2n+1} \ , \ v_n = n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n + 24 \ \text{ et } \ t_n = 3n - 5$$

Examiner si chacune de ces suites est géométrique ou non.

Q 5 - Détermination d'une raison [⋆⋆]

Les ventes d'un constructeur de voitures électriques sont de 3000 véhicules pour l'année 2017. L'Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie (ADEME) promet des aides aux constructeurs dont le volume des ventes aura triplé (au moins) d'ici 10 années. Le constructeur réalise donc un cahier des charges intégrant un pourcentage d'augmentation régulier de son activité afin d'atteindre en 2027 un volume de ventes de 9000 véhicules.

Pour cela on modélise le problème à l'aide d'une suite géométrique en posant u_n le nombre de véhicules, exprimé en milliers d'unités, que le constructeur prévoit de vendre pour l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3$.

1. Dans cette question, on suppose que le constructeur prévoit une augmentation de ses ventes de 8% par année. Préciser la valeur de la raison q correspondante et calculer u_{10}. Cela lui permettra-t-il d'atteindre son objectif en 2027 ?

2. Un informaticien conçoit un algorithme qui permet de déterminer une valeur de la raison q de la suite géométrique (u_n) permettant d'avoir $u_{10} \geqslant 9$. Pour cela, il teste toutes les raisons possibles à partir de $q = 1{,}08$ avec un pas de 0,01 jusqu'à obtention d'une raison convenable.
Compléter le tableau ci-dessous (des lignes supplémentaires peuvent être ajoutées) jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

3. À l'aide d'un calcul mathématique, déterminer la plus petite valeur possible de la raison q permettant d'atteindre cet objectif.

Algorithme en langage naturel

```
VARIABLES
u EST DU TYPE NOMBRE
q EST DU TYPE NOMBRE
pas EST DU TYPE NOMBRE
INITIALISATION
q ← 1.08
u ← 3 × q^10
ENTRER(pas)
DEBUT ALGORITHME
TANT_QUE u ⩽ 9
DEBUT_TANT_QUE
  q ← q + pas
  u ← 3 × q^10
FIN_TANT_QUE
AFFICHER q
FIN ALGORITHME
```

Algorithme en Python

```python
def raison(pas) :
  q = 1.08          # initialisation de q
  u = 3*q**10       # calcul de u_10
  while u <= 9 :    # tant que u_10 est <= 9 faire :
    q = q + pas     # augmenter q du pas
    u = 3*q**10     # recalcul de u_10
  return q          # retourner q
```

Tableau à compléter (avec un pas de 0,01)

Étapes de l'algorithme	q	u
Initialisation	1.08	6.477
Étape 1		
Étape 2		
Étape 3		

Q 6 - Limite d'une suite géométrique [★★]

Soient (u_n) et (v_n) les suites géométriques définies respectivement par :

$$u_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \text{ et } v_n = \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

1. Préciser la limite de ces deux suites.

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$s_n = u_n + v_n$$

La suite (s_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$p_n = u_n \times v_n$$

La suite (p_n) est-elle géométrique ? Préciser sa limite.

1.2 Utiliser une suite auxiliaire

Q 7 - Suite arithmético-géométrique [★★]

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 5 \end{cases}$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{5}{2}$$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q que l'on précisera. Calculer son premier terme v_0.

2. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Taux d'évolutions et pourcentages

Q 8 - Pourcentages - Taux d'évolutions [⋆⋆]

Dans un pays, la compagnie d'électricité décide d'augmenter ses tarifs de 6% par an à partir du 1er janvier 2015 et ceci durant 5 années consécutives.

1. Un ménage a dépensé 650 euros d'électricité pour l'année 2014. En supposant sa consommation identique chaque année, quel sera le montant de sa facture d'électricité pour l'année 2015 ? Et en 2019 ?

2. Calculer le pourcentage global d'évolution sur l'ensemble des 5 années, de 2015 à 2019.

3. En l'année 2020, la compagnie décide de ramener le tarifs au niveau de l'année 2014 (donc annuler les cinq hausses consécutifs de 6%). De quel pourcentage faudra-t-il alors baisser les tarifs ?

Q 9 - VRAI ou FAUX sur les pourcentages [⋆⋆]

Une voiture coûte 15000 euros toutes taxes comprises (on suppose que le taux de T.V.A. est de 20%).
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le prix hors taxe de ce véhicule est de 12000 euros.

2. Le commerçant concède deux remises successives de 6% puis de 4% sur ce véhicule.
Le prix de cette voiture après ces deux remises est de 13500 euros.

3. L'année suivante, ce même véhicule passe de 15000 euros à 15750 euros. L'augmentation est de 5%.

4. Si le commerçant concède une remise de 5% sur le prix de 15750 euros, alors le prix de ce véhicule reviendra à 15000 euros.

Q 10 - Placement d'un capital [⋆ ⋆ ⋆]

Le 1er janvier 2017, un particulier dépose une somme de 4000 euros sur un compte rémunéré à 3% d'intérêts annuels. Les intérêts sont composés, ce qui signifie qu'ils s'ajoutent chaque 1er janvier au capital présent sur le compte. On suppose que le particulier ne fait aucun retrait ni dépôt d'argent sur son compte.

1. Quel sera le capital obtenu après 5 années ? (Autrement dit, la somme d'argent sur le compte au 1er janvier 2022).

2. Combien d'années ce particulier devra-t-il attendre afin que son capital soit égal à 5000 euros au moins ?

3. Après 12 années, ce capital est de 5703,04 euros (au centime près). Les intérêts cumulés s'élèvent donc à 1703,04 euros. Si le compte avait été rémunéré annuellement à 1,5% seulement au lieu de 3%, de quel pourcentage ces intérêts seraient diminués ?

Continuité et dérivabilité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et corollaire (th. de la bijection)

Q 11 - Solution d'une équation du type $f(x) = k$: existence et unicité [★★]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,,2]$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

Q 12 - Étude d'un bénéfice [★]

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,,10]$ par :

$$B(x) = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 5$$

où x représente le nombre de pièces produites et vendues exprimé en centaines et $B(x)$ le bénéfice en milliers d'euros.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,,10]$.

2. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ possède une solution unique α sur $[\ln(4)\,,10]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

3.2 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction

Q 13 - Comparaison entre e^x et $x + 1$ [★★]

Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$$

3.3 Équation de la tangente

Q 14 - Tangente commune à deux courbes en un même point [★★]

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Calculer $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$. En déduire que les courbes C_f et C_g admettent un point commun A.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent la même tangente au point A.

3.4 Lectures graphiques

Q 15 - Lecture graphique de nombres dérivés [★]

Soient f et g les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous.

La droite T est tangente aux courbes C_f et C_g.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection (visibles sur le graphique) entre C_f et C_g.

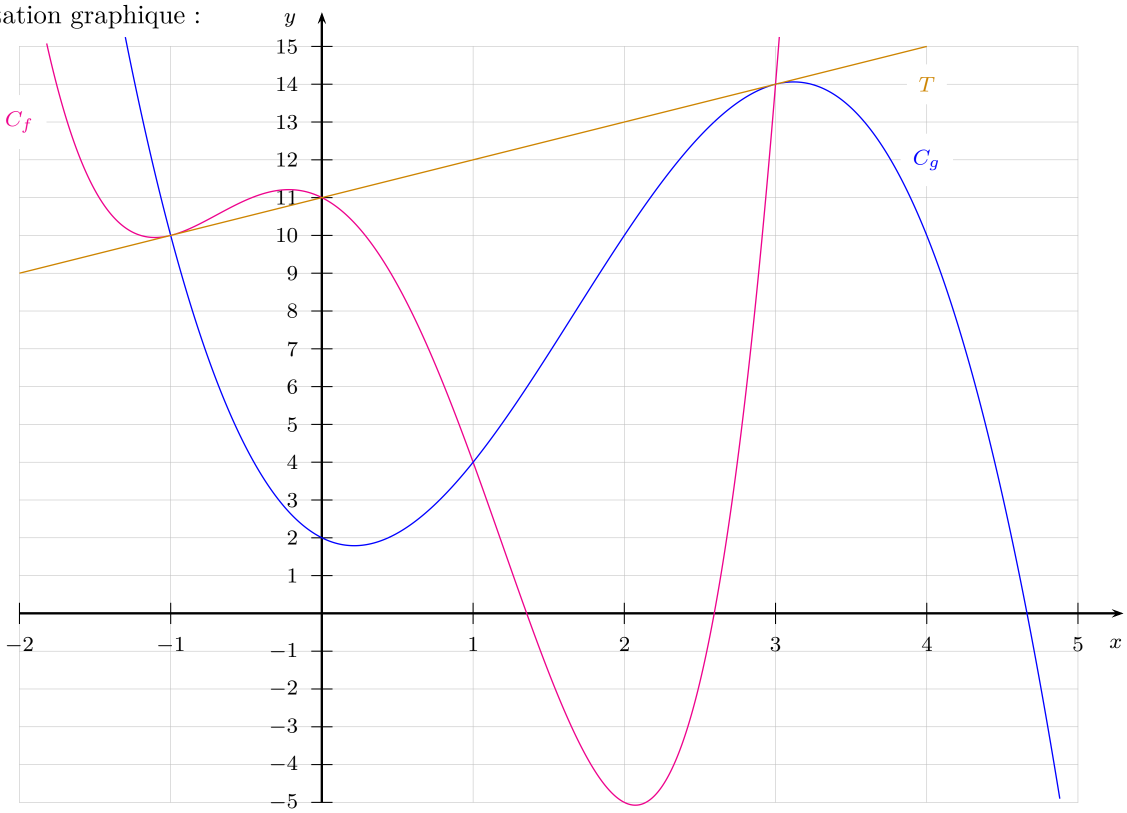
2. Lire graphiquement $f'(-1)$ et $g'(3)$.

3. On donne :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

Retrouver les résultats des deux questions précédentes par calcul.

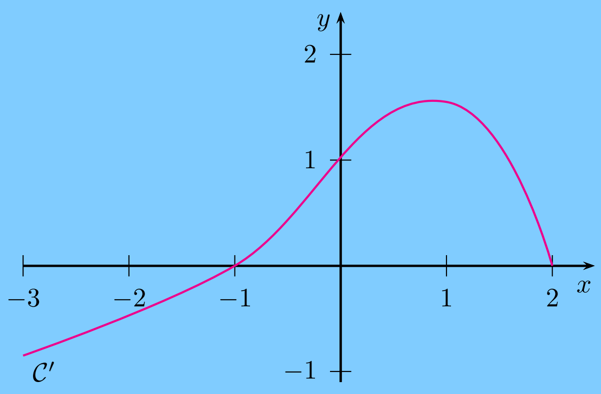
Représentation graphique :



Q 16 - VRAI ou FAUX à partir de la courbe de la dérivée [⋆⋆⋆]

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3\,,2]$ telle que $f(0) = -1$.

On donne, ci-dessous, la représentation graphique $\mathcal{C}'$ de la fonction dérivée f' de f :



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,,-1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,,2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,,2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,,0)$.

http://question-type-bac.fr

Q 17 - Détermination d'une fonction à partir d'informations graphiques [⋆⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux constantes}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f donnée ci-dessous. On sait que :

- les points $A(0\,,2)$ et $D(2\,,0)$ appartiennent à la courbe C_f ;
- la tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

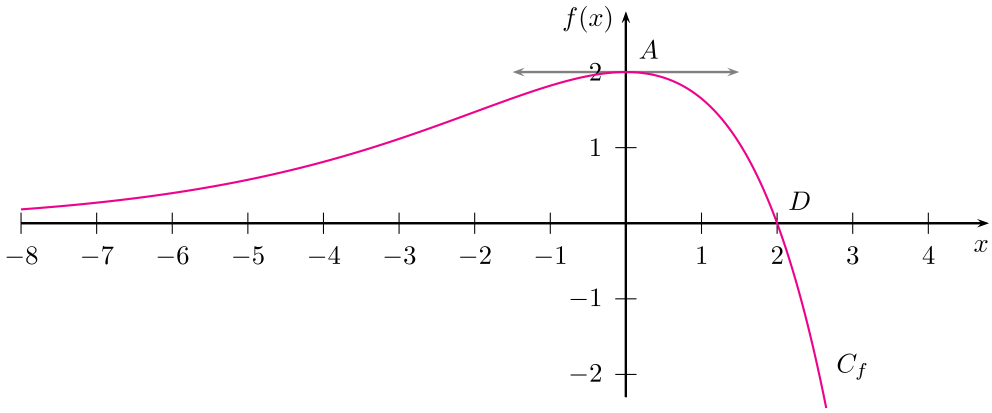
1. Exprimer $f'(x)$ en fonction des constantes a et b.

2. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.

3. En déduire les valeurs des constantes a et b.

http://question-type-bac.fr

Représentation graphique de la fonction f :



Convexité

Q 18 - Convexité - Point d'inflexion. [⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^x$$

Dresser le tableau de convexité de la fonction f.

Préciser si la courbe C_f de f admet un point d'inflexion.

Q 19 - Vitesse de propagation d'une maladie [⋆⋆]

Dans une ville, frappée par une épidémie, le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jours depuis le début de la maladie, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,,30]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 30t^2$$

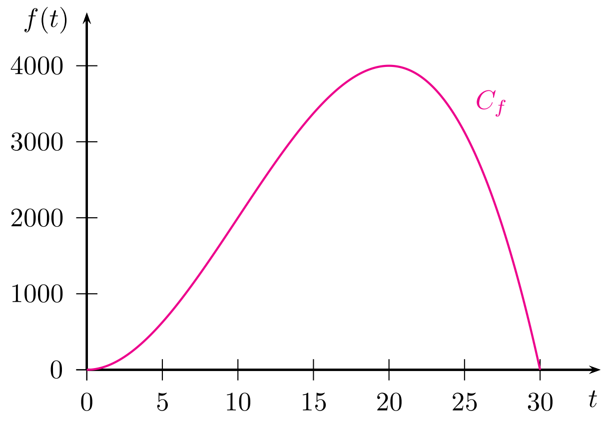
La représentation graphique C_f de f est donnée ci-dessous.

On admet que la vitesse de propagation de la maladie au jour t est donnée par le nombre dérivé $f'(t)$.

1. Étudier le sens de variation de f.
En déduire le jour où le nombre de personnes malades est maximal.

2. Étudier la convexité de f.
En déduire le jour où la vitesse de propagation de la maladie est maximale.

Représentation graphique de la fonction f :



Fonctions exponentielles et logarithmes

5.1 Résoudre une (in)équation

Q 20 - Résoudre une inéquation comportant une exponentielle [★★]

Un agriculteur cultive des tomates à partir de semis qu'il repique ensuite sous serre.

Après repiquage, la hauteur moyenne des plants au cours du temps est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{3}{2 + 22\mathrm{e}^{-0,12t}}$$

où t est le temps exprimé en jours à partir du repiquage et $h(t)$ la hauteur moyenne du plant en mètres.

1. Calculer $h(0)$. Quelle est la taille moyenne des semis repiqués ?

2. Au bout de combien de temps, la taille moyenne d'un plant dépassera-t-elle 1 mètre ?

Q 21 - Résoudre une (in)équation comportant des logarithmes [★★]

Dans chaque cas, préciser les contraintes (c'est-à-dire les nombres réels x pour lesquels l'(in)équation a un sens) puis résoudre :

1. $$2\ln(x-2) = \ln(8-x)$$

2. $$\ln(x-1) + \ln(x-3) \leqslant \ln(2x-5)$$

5.2 Étude de fonctions

Q 22 - Étudier une fonction comportant un logarithme [★★]

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Dresser le tableau de variations de f.

Q 23 - Étude de fonctions coûts [★★]

Une entreprise fabrique des produits chimiques. Le coût mensuel total de fabrication de q tonnes de produit, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction C_T définie pour $q \in [1\,,20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2\mathrm{e}^{-0,2q}$$

1. On appelle *coût (mensuel) moyen* [1] la fonction C_M définie pour $q \in [1\,,20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}$$

Dresser le tableau de variations de la fonction C_M.

2. Pour quelle quantité de produit le coût moyen est-il minimal ?

Quel est alors le coût total mensuel de fabrication ?

5.3 Avec des suites

Q 24 - Propriétés des logarithmes et suites [★★]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \mathrm{e}^3$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}$$

On admet que $u_n > 0$ et on pose $v_n = \ln\big(u_n\big) - 2$, pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme v_0.

2. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est égale à e^2.

1. cette fonction C_M représente le coût de fabrication d'une unité (ici une tonne de produit) pour une production globale de q unités.

BAC ES - THÈME 6

Calcul intégral

6.1 Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive

Q 25 - Cas où une primitive est suggérée par l'énoncé [⋆⋆]

Soit f la fonction logarithme népérien :

$$f(x) = \ln(x) \ \text{ pour } x \in]0\,,+\infty[$$

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$F(x) = x\ln(x) - x$$

est une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$.

2. En déduire les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_{1/2}^{2} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Q 26 - Utilisation d'une forme dont on connaît les primitives [⋆⋆]

Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \ \text{ et } \ J = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Q 27 - Cas où l'on obtient une primitive par transformation d'écriture [⋆⋆]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

2. En déduire l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\ln(1/2)}^{\ln(2)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.2 Calcul de l'aire d'un secteur

Q 28 - Calcul de l'aire d'un secteur [⋆]

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{2-x}$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives de ces deux fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante :

$$f(x) = g(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g.

2. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points $(x\,,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant g(x) & \text{lorsque} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

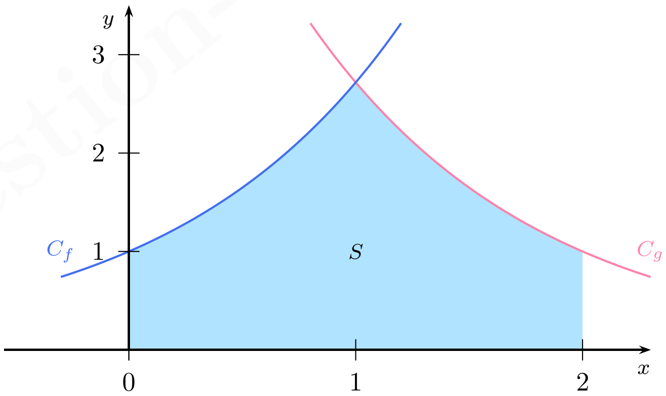


FIGURE 6.1 – Secteur S sous plusieurs courbes.

Q 29 - Calcul de l'aire d'un secteur (bis) [⋆⋆⋆]

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^x \quad ; \quad h(x) = \mathrm{e} \times x$$

On note C_f, C_g et D_h les représentations graphiques respectives de ces trois fonctions dans un repère orthonormal.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$g(x) \leqslant f(x)$$

En déduire l'abscisse du point d'intersection entre les courbes C_f et C_g.

2. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$h(x) \leqslant f(x)$$

Démontrer, de plus, que la droite D_h est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

3. On considère le secteur S défini par l'ensemble des points $(x\,,y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} g(x) \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad x \leqslant 0 \\ h(x) \leqslant y \leqslant f(x) & \text{lorsque} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ce secteur S est représenté ci-dessous en bleu. Calculer son aire.

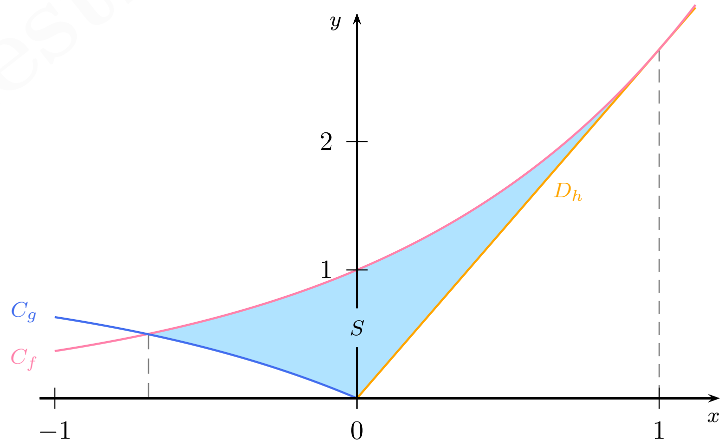


Figure 6.2 – Secteur S compris entre plusieurs courbes.

6.3 Calcul de la valeur moyenne d'une fonction

Q 30 - Calcul de la valeur moyenne d'une fonction [★★]

La hauteur d'une plante, au cours du temps, est donnée par la fonction h définie par :

$$h(t) = \frac{2}{1 + 10\mathrm{e}^{-0,1t}}$$

où t est le temps exprimé en semaines ($0 \leqslant t \leqslant 300$) et $h(t)$ la hauteur de la plante exprimée en mètres.

Les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près.

1. Calculer la hauteur de la plante après 30 semaines, puis après 60 semaines.

2. Démontrer que, pour tout $t \in [0\,,300]$, on a :

$$h(t) = 20 \times \frac{0,1\mathrm{e}^{0,1t}}{\mathrm{e}^{0,1t} + 10}$$

En déduire une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0\,,300]$.

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[30\,,60]$.

Interpréter le résultat.

BAC ES - THÈME 7

Probabilités conditionnelles

7.1 Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales

Q 31 - Probabilités conditionnelles - Formule des probabilités totales [⋆⋆]

Un élève de terminale est dans une série où le taux de réussite au baccalauréat est de 80%.

Après son année de terminale, qu'il ait eut son bac ou non, il passe un concours d'admission à une école dont les taux d'admissions sont les suivants :

- parmi les candidats bacheliers qui présentent ce concours, 60% sont admis dans cette école ;
- parmi les candidats non bacheliers qui présentent ce concours, 30% sont admis dans cette école.

1. Calculer la probabilité que l'élève ait sont bac et soit admis dans l'école.

2. Calculer la probabilité que l'élève soit admis dans l'école.

3. Sachant que l'élève a été admis à l'école, quelle est la probabilité qu'il ait eut son bac ?

7.2 Probabilités et suites

Q 32 - Probabilités conditionnelles et suites [★★]

Un archer étudie ses statistiques de réussite lors de séances de tirs à l'arc. Il remarque que lors d'une série :

- il possède 70% de chance de réussir le premier tir ;
- s'il réussit un tir, alors il gagne en confiance et possède 80% de chance de réussir le suivant ;
- s'il rate un tir, alors il perd confiance et ne possède plus que 60% de chance de réussir le suivant.

On note p_n la probabilité que l'archer réussisse le $n-$ième tir de la série.

1. À l'aide d'un arbre illustrant la transition entre $n-$ième et le $(n+1)-$ième tir, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$$

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = p_n - 0{,}75$$

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison q ainsi que son premier terme u_1.

3. Exprimer u_n, puis p_n, en fonction de n.

4. Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter.

Lois de probabilités

8.1 Lois discrètes

8.1.1 Lois discrètes quelconques

Q 33 - Calcul d'espérance [⋆⋆]

Dans cet exercice, n est un entier vérifiant $n \geqslant 4$. On place n jetons dans une urne : un jaune et des blancs. À chaque fois que l'on choisit, au hasard, un jeton de l'urne on note :

$$J = \text{« le jeton obtenu est jaune »}$$

$$B = \text{« le jeton obtenu est blanc »}$$

On considère le jeu suivant : on choisit successivement deux jetons, avec remise. On gagne 16 euros si l'on obtient deux fois le jeton jaune ; on gagne 1 euros si l'on obtient deux fois un jeton blanc et on perd 5 euros sinon. On note X le gain algébrique en euros ($+16$; $+1$ ou -5).

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 16)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = -5)$ en fonction de n.

3. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n.
Combien de jetons faut-il mettre au total dans l'urne pour que ce jeu soit équitable ?

8.1.2 Lois binomiales

Q 34 - Calculs avec la loi binomiale [⋆⋆]

Un archer possède 40% de chance d'atteindre une cible. Il effectue 15 tirs successivement.
On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'il en réussisse exactement 10.

2. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au plus 6.

3. Calculer la probabilité qu'il en réussisse entre 8 et 12.

4. Calculer la probabilité qu'il en réussisse au moins 6.

5. Combien de tirs peut-il espérer réussir ?

On donnera les résultats des probabilités à 10^{-4} près.

Q 35 - Étude d'une inéquation du type $a^n \leqslant b$ par algorithme et par calcul [★★]

On lance plusieurs fois de suite un dé (à 6 faces et bien équilibré).

On note n le nombre de lancers ($n \geqslant 2$) et X le nombre de 6 obtenus.

1. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers) est :

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

2. Un informaticien conçoit l'algorithme suivant :

Algorithme en langage naturel

Déclarations	R est un réel
	n est un entier
Entrée	SAISIR le nombre R, compris entre 0 et 1
Initialisation	$n \leftarrow 0$
Traitement	TANT_QUE 1 - (5/6)^n < R
	DEBUT_TANT_QUE
	$n \leftarrow n+1$
	FIN_TANT_QUE
Sortie	AFFICHER le nombre n

Algorithme en Python

```
def nb_de_lancers(R) :
    n = 0
    while 1 - (5/6)**n < R :
        n = n + 1
    return n
```

Compléter le tableau suivant dans le cas où l'utilisateur rentre la valeur $R = 0{,}5$ dans l'algorithme ci-dessus :

Valeur de n	0	1	2				
Valeur de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	0						
Condition $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n < R$	Vrai						

Quelle valeur de n est affichée en sortie ?

Les résultats numériques de cette question seront arrondis à 10^{-4} près.

3. À l'aide de l'algorithme précédent, préciser combien de fois il faudrait lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit supérieure à 50%.

4. Retrouver le résultat précédent en résolvant, par un calcul rigoureux, l'inéquation $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}5$.

8.2 Lois à densité

8.2.1 Lois uniformes

Q 36 - Calculs directs et réciproques avec la loi uniforme [⋆⋆]

Tous les jours, Guy joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

Lorsqu'il se connecte sur le site, le durée nécessaire pour que les quatre amis soient réunis est une variable aléatoire D, exprimée en secondes.

On admet que cette variable aléatoire D suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20\,,120]$.

1. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps inférieur à une minute.

2. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis en un temps compris entre 60 et 90 secondes.

3. Un des amis remarque que dans 10% des cas, ils se retrouvent tous réunis en moins d'un certain temps t. Calculer ce temps t.

4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D.
Interpréter le résultat.

8.2.2 Lois normales

Q 37 - Lectures graphiques [⋆]

La fréquentation journalière d'un site touristique est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 58$ personnes.

On dispose de l'information donnée sur le graphique ci-dessous, à savoir $\mathbb{P}(X \leqslant 65) = 0{,}72$.

Déterminer, en justifiant :

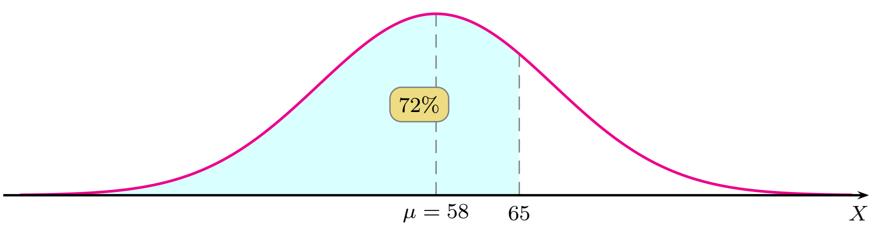
1. $\mathbb{P}(X \geqslant 65)$.

2. $\mathbb{P}(58 \leqslant X \leqslant 65)$.

3. $\mathbb{P}(51 \leqslant X \leqslant 65)$.

4. $\mathbb{P}(X \geqslant 51)$.

5. $\mathbb{P}(X = 65)$.



Q 38 - Calculs directs et réciproques avec la loi normale [★★]

Dans une population, on étudie la taille des individus.

La moyenne des individus est $\mu = 1{,}76$ m. L'écart-type est $\sigma = 0{,}10$ m.

On choisit un individu au hasard et on note X sa taille.

On admet que cette variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}$ de moyenne μ et d'écart-type σ. On notera [1] $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$.

1. Calculer la probabilité que cet individu mesure moins de 1,80 m.

2. Calculer la probabilité que cet individu mesure entre 1,70 m et 1,80 m.

3. Calculer la probabilité que cet individu mesure plus de 2 m.

4. On sait que cet individu est tel que 75% des personnes de la population sont plus petites que lui. Quelle taille mesure cet individu ?

On arrondira les calculs numériques à 10^{-4} près.

http://question-type-bac.fr

Q 39 - Intervalles de centre μ et de rayon $k\sigma$ [★★]

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu\,,\sigma)$$

Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$$

$$\mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma)$$

On arrondira les résultats à 10^{-3} près.

http://question-type-bac.fr

Q 40 - Détermination d'un écart-type [★★★]

Une entreprise industrielle fabrique des pièces dont la longueur X doit satisfaire certaines contraintes.

On admet que cette longueur X est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 65$ mm et d'écart-type σ. Le service qualité considère une pièce conforme lorsque $64 \leqslant X \leqslant 66$.

Le cahier des charges est tel que l'entreprise souhaite obtenir au minimum 92% de pièces conformes.

1. Sur la machine utilisée par l'entreprise, le réglage optimal permet d'avoir un écart-type $\sigma = 0{,}7$. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme si la production est faite sur cette machine. Les exigences du cahier des charges sont-elles atteintes ?

2. L'entreprise envisage l'achat d'une nouvelle machine plus performante. Mais plusieurs choix de machines sont proposées au catalogue avec, pour chacune d'entre-elles, des valeurs de σ différentes. Calculer la valeur maximale de σ que doit posséder une machine afin qu'elle produise au minimum 92% de pièces conformes.

1. certains auteurs ou ouvrages notent $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu\,,\sigma^2\right)$.

BAC ES - THÈME 9

Intervalles de fluctuation et de confiance

Q 41 - Intervalle de fluctuation - Règle de décision [⋆⋆]

Une élection a eu lieu et un candidat, Monsieur G. GANIET, est élu avec 72% des suffrages exprimés.

Suspicieux ou mauvais perdant, un autre candidat, Monsieur D. MAULI, demande un recomptage des voix dans deux bureaux de vote :

- dans le bureau n° 1, 500 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 75% des suffrages ;
- dans le bureau n° 2, 1000 bulletins de vote sont vérifiés et le candidat G. GANIET obtient 79% des suffrages.

1. Sachant que sur l'ensemble des suffrages exprimés, le candidat G. GANIET a obtenu un score de 72%, calculer un intervalle de fluctuation asymptotique, au seuil de 95%, de la fréquence des voix en sa faveur pour un échantillon de taille $n = 500$.
Peut-on considérer que le score de 75% dans le bureau de vote n° 1 est significativement éloigné du score de référence de 72% au point d'affirmer (avec un niveau de confiance de 95%) qu'il y a eu une fraude dans ce bureau de vote ?

2. Même question avec le bureau de vote n° 2 (on calculera un intervalle de fluctuation asymptotique pour un échantillon de taille $n = 1000$).

Q 42 - Intervalle de confiance - Détermination de la taille d'un échantillon [⋆⋆]

À l'approche d'une élection, un institut effectue un sondage auprès d'un échantillon de 1000 personnes en leur demandant si elles sont prêtes à voter pour le candidat Monsieur J. KHROA. À l'issue de ce sondage, il s'avère que 52% des personnes interrogées se disent prêtes à voter pour ce candidat.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion des électeurs prêts à voter pour Monsieur J. KHROA.

2. Quelle est l'amplitude, en points, de cet intervalle ?

3. On voudrait désormais avoir un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, ayant une amplitude de 2 points seulement. Calculer la taille de l'échantillon des personnes à interroger pour parvenir à cet objectif.

Découvrez les corrigés détaillés ainsi que des rappels de cours sur notre site :

http://question-type-bac.fr/nos-documents/

Index