Quelques démonstrations fausses en mathématiques

- Avant-propos -

Évidemment, toutes les démonstrations ci-dessous contiennent (volontairement) des erreurs (et nous savons lesquelles bien sûr). Certaines sont plus subtiles que d'autres : à vous de les trouver !

1 Avec des identités remarquables et des factorisations

Considérons deux quantités égales A et B :

$$A = B$$

Multiplions les deux membres par B :

$$AB = B^2$$

Soustrayons A^2 dans les deux membres :

$$AB - A^2 = B^2 - A^2$$

Factorisons :

$$A(B - A) = (B - A)(B + A)$$

Simplifions par $B - A$ ainsi :

$$A = B + A$$

Or, on supposé A et B égaux. En prenant par exemple $A = B = 1$, il vient :

$$1 = 1 + 1$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{1 = 2}$$

2 Avec des exposants

En une ligne :

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Finalement :

$$\boxed{-1 = 1}$$

3 Avec des sommes infinies

Posons :

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

D'une part, en regroupant les termes deux à deux, on obtient :

$$A = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots$$

$$A = 0$$

Mais d'autre part, on peut également écrire :

$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

$$A = 1 - A$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Au final, on a alors :

$$\boxed{\frac{1}{2} = 0}$$

4 Avec des sommes infinies (bis)

Posons :

$$A = 1 + 1 + 1 - 3 + 1 + 1 + 1 - 3 + 1 + 1 + 1 - 3 + \dots$$

D'une part, en regroupant des termes deux à deux :

$$A = 1 + 1 + (1-3) + (1+1) + (1-3) + (1+1) + \dots = 1 + 1 - 2 + 2 - 2 + 2 + \dots = 1 + 1$$

D'autre part, en regroupant les termes par paquets de 4 :

$$A = (1+1+1-3) + (1+1+1-3) + (1+1+1-3) + \dots = 0$$

Finalement :

$$\boxed{1 + 1 = 0}$$

Variante : en regroupant les termes par paquets de 4 mais en laissant 1 + 1 +1 de côté :

$$A = 1 + 1 + 1 + (-3 + 1 + 1 + 1) + (-3 + 1 + 1 + 1) + \dots = 1 + 1 + 1 = 3$$

Finalement :

$$\boxed{1 + 1 = 3}$$

5 Avec des produits infinis

Posons :

$$A = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots}$$

D'une part, en simplifiant par 2, puis par 3, puis par 4 etc, on obtient :

$$A = 1$$

Mais d'autre part, on peut également écrire :

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots$$

Or, chacune des fractions ci-dessus est strictement inférieure à 1 donc :

$$A < 1$$

Au final, on a alors :

$$\boxed{1 < 1}$$

6 Calcul de la somme $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

En additionnant deux lignes

D'une part :

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

Mais d'autre part, en retranchant 1 :

$$S - 1 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots$$

Effectuons la somme de ces deux lignes :

$$\begin{array}{ccc} & S & = & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots \\ (+) & S - 1 & = & 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots \\ \hline & 2S - 1 & = & 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots \end{array}$$

Dans le membre de droite, on regroupe les termes deux par deux :

$$2S - 1 = (3 + 5) + (7 + 9) + (11 + 13) + \dots$$

$$2S - 1 = 8 + 16 + 24 + \dots$$

$$2S - 1 = 8(1 + 2 + 3 + \dots)$$

$$2S - 1 = 8S$$

$$\boxed{S = -\frac{1}{6}}$$

En séparant les nombres pairs et les nombres impairs

La somme S peut encore s'écrire :

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \dots + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \dots$$

On obtient deux sous-sommes à calculer. Dans la première, on peut factoriser par 2. Dans la seconde, on laisse le 1 tout seul et on regroupe les termes suivants deux par deux :

$$S = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + \dots + 1 + (3 + 5) + (7 + 9) + (11 + 13) + \dots$$

On a alors :

$$S = 2S + 1 + 8 + 16 + 24 + \dots$$

On remarque, comme précédemment, que l'on peut mettre 8 en facteur dans la sous-somme $8+16+24+\dots$ ainsi :

$$S = 2S + 1 + 8(1+2+3+\dots)$$

Et finalement :

$$S = 2S + 1 + 8S$$

$$S = 10S + 1$$

$$-9S = 1$$

$$\boxed{S = -\frac{1}{9}}$$

En regroupant par paquets de trois

$$S = 1 + (2+3+4) + (5+6+7) + (8+9+10) + (11+12+13) + \dots$$

$$S = 1 + 9 + 18 + 27 + 36 + \dots$$

$$S = 1 + 9(1+2+3+4+\dots)$$

$$S = 1 + 9S$$

$$\boxed{S = -\frac{1}{8}}$$

À la Ramanujan [1]

D'une part :

$$S = 1+2+3+4+5+6+\dots$$

Mais d'autre part, en multipliant par 4 :

$$4S = 4+8+12+16+20+24+\dots$$

Effectuons la différence de ces deux lignes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & \dots \\ (-) & 4S & = & & & 4 & & & + & 8 & & & + & 12 & + & \dots \\ \hline & -3S & = & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - & 6 & + & \dots \end{array}$$

Reste à calculer la somme alternée $1-2+3-4+5-6+\dots$.

Il suffit de remarquer (en développant) que l'on a :

$$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots) = 1$$

Ainsi, pour $x \neq 1$, on obtient ce qu'on appelle un développement en série entière :

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$$

On dérive de part et d'autre :

$$-\frac{-1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots$$

1. Srinivasa Ramanujan, mathématicien indien (1887 - 1920) est le mathématicien dont la phénoménale intuition est probablement la plus grande de tous les temps : bien qu'autodidacte, il fut capable de formuler de nombreuses relations mathématiques d'une très grande complexité. Il en exposa certaines au mathématicien anglais Hardy qui fut très impressionné. Ce dernier l'invita en Angleterre. Ramanujan pu ainsi développer de nombreux résultats en théorie de nombres. Mais atteint de problèmes de santé, il retourna en Inde où il mourut précocement à l'âge de 32 ans seulement.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

On remplace x par -1 :

$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

Ainsi, on a finalement :

$$-3S = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{S = -\frac{1}{12}}$$

7 Avec des calculs de dérivées

Soit n un nombre quelconque. On a :

$$\underbrace{n + n + \cdots + n}_{n \text{ termes}} = n^2$$

On dérive des deux côtés de l'égalité (par rapport à n) :

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes}} = 2n$$

C'est-à-dire :

$$n = 2n$$

Prenons $n = 1$ ainsi :

$$\boxed{1 = 2}$$

8 Avec des nombres complexes

Nous savons que :

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$$

Donc, pour tout réel x :

$$\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}\right)^x = 1^x = 1$$

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} = 1$$

Prenons $x = \frac{1}{4}$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 1$$

D'où :

$$\boxed{\mathrm{i} = 1}$$

9 Avec une équation du second degré

Considérons l'équation suivante :

$$x^2 + 1 = 0$$

Remarquons que l'on peut l'écrire :

$$(x+1)^2 - 2x = 0$$

$$(x+1)^2 = 2x$$

Or, un carré est toujours positif donc :

$$2x \geqslant 0$$

$$x \geqslant 0$$

Mais d'autre part, l'équation initiale peut également s'écrire :

$$(x-1)^2 + 2x = 0$$

$$(x-1)^2 = -2x$$

Or, un carré est toujours positif donc :

$$-2x \geqslant 0$$

$$x \leqslant 0$$

Bilan : on a vu que $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ donc $x = 0$.

En remplaçant dans l'équation initiale, on obtient alors :

$$\boxed{1 = 0}$$

10 Avec un raisonnement absolument valeureux

Soient a et b deux réels quelconques tels que $a \neq b$.

Nous allons montrer qu'en fait $a = b$.

Soit c la moyenne de a et de b :

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Autrement dit :

$$2c = a + b$$

Multiplions par $a - b$ (qui, soit dit au passage, n'est pas nul) :

$$2c(a-b) = (a+b)(a-b)$$

On développe des deux côtés :

$$2ac - 2bc = a^2 - b^2$$

On transpose quelques termes :

$$b^2 - 2bc = a^2 - 2ac$$

Ajoutons c^2 dans chaque membre :

$$b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - 2ac + c^2$$

On reconnaît des identités remarquables :

$$(b-c)^2 = (a-c)^2$$

D'où :

$$b-c = a-c$$

Et enfin :

$$b = a$$

C'est-à-dire :

$$a = b$$

En conclusion, deux nombres différents sont toujours égaux.