ROC

Démonstrations exigibles au bac S 2018

Avant-propos

Sur ce document figurent les dix démonstrations explicitement au programme de la terminale S. Pour la plupart, **ces théorèmes sont difficiles**, voire très difficiles pour un élève de terminale. Il ne s'agit pas d'apprendre ces démonstrations par cœur. D'ailleurs, aucun sujet de baccalauréat ne demandera de les restituer ainsi d'une traite. Mais il peut arriver qu'un exercice demande, à l'aide de plusieurs petites questions guidées, de refaire ces démarches dans le contexte du programme ou en le variant légèrement. Il est donc important, pour le candidat exigeant qui vise l'excellence, d'avoir travaillé ces démonstrations et d'en avoir compris les mécanismes.
Pour l'élève « standard » dont le principal objectif est d'obtenir son bac, nous lui conseillons d'abord de travailler et progresser de la façon la plus efficace qu'il soit à l'aide de « questions-types » disponibles à l'adresse suivante :

`http://question-type-bac.fr/nos-documents/`

⚠ Lors du bac S 2014 métropole (dont un corrigé est visible sur notre site [1]), on a vu apparaître une petite ROC [2] facile sur les propriétés des nombres complexes et de leurs conjugués. Cette démonstration n'est pas inscrite officiellement au programme. Dès lors, comment est-il possible qu'une telle démonstration soit exigée ? La réponse est simple : le programme ne peut pas faire une liste complète de toutes les petites propriétés que les candidats doivent savoir démontrer ! Seuls les grands théorèmes difficiles sont signalés. Ainsi, concernant les ROC, deux possibilités peuvent se produire :

- soit une petite propriété facile de cours sera exigée. Comme par exemple démontrer que $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$ sachant que $\ln(XY) = \ln(X) + \ln(Y)$ [3]. Ces petites démonstrations figurent dans tout cours de terminale S, il suffit de l'apprendre !
- soit un théorème difficile sera abordé, mais alors il le sera de façon guidée et c'est dans ce cas que ce document se révèle utile. En effet, peu de professeurs ont matériellement le temps de pouvoir faire, en classe, toutes ces démonstrations dont certaines sont longues et ardues.

1.1 Suites

Théorème 1 - Théorème de comparaison sur les suites [⋆]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que :
- $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;
- u_n tend vers $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$).

Alors v_n tend également vers $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$).

http://question-type-bac.fr

Démonstration

Avant toute chose, rappelons la définition suivante :

On dit qu'une suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $[A\,,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

1. à cette adresse : `http://question-type-bac.fr/sujets-et-corriges-bac-maths-2014/`
2. restitution organisée de connaissances.
3. ce genre de propriété classique doit pouvoir être démontrée sans hésitation. On évalue par exemple la quantité $\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \ln(B)$ qui, d'après la propriété indiquée du logarithme donne $\ln\left(\frac{A}{B} \times B\right) = \ln(A)$ et on en déduit bien le résultat en soustrayant $\ln(B)$.

Puisque u_n tend vers $+\infty$, on peut affirmer, par définition, que tout intervalle de la forme $[A\,,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N_1.
De plus, par hypothèse, on a $u_n \leqslant v_n$, à partir d'un certain rang que nous noterons N_2.
Notons N le plus grand des deux rangs précédents, ainsi toutes les conditions sont réunies pour qu'on puisse écrire que pour $n \geqslant N$:

$$u_n \geqslant A \ \textbf{ et } \ v_n \geqslant u_n$$

En conséquence, à partir du rang N, on a :

$$v_n \geqslant A$$

L'intervalle $[A\,,+\infty[$ contient donc également toutes les valeurs v_n à partir du rang N.
Cela signifie bien que la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

Illustration

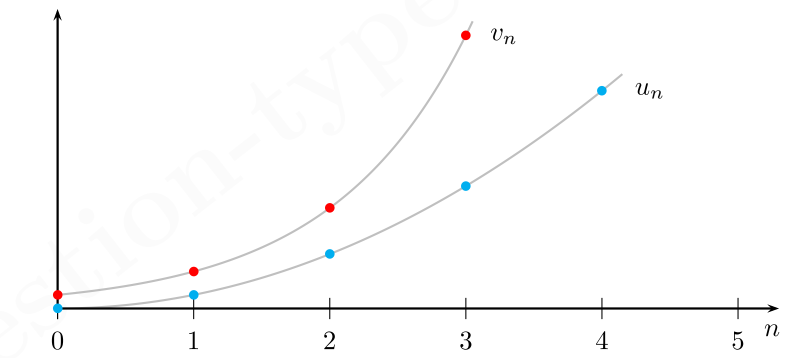

FIGURE 1.1 – Théorème de comparaison sur les suites divergentes.

. . . .

Théorème 2 – Limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$ [⋆⋆]

Lorsque $q > 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

Démonstration

Démontrons, par récurrence, que pour tout réel $a > 0$, on a la propriété suivante [4] :

$$\mathcal{P}(n) : (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

- Lorsque $n = 0$, on a d'une part $(1+a)^n = (1+a)^0 = 1$ et d'autre par $1 + na = 1$ d'où $\mathcal{P}(0)$.
  La propriété $\mathcal{P}$ est donc initialisée en 0.
- Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 0$, on a $\mathcal{P}(n)$:

  $$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

  Multiplions les deux membres de cette inégalité par $(1+a)$ (qui est une quantité strictement positive) :

  $$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$$

  $$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2$$

  $$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$$

4. cette propriété est appelée « inégalité de Bernoulli ».

Or, na^2 est positif, donc on peut encore écrire :

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$$

Ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

On a donc montré que la propriété $\mathcal{P}$ est héréditaire.

On en déduit que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout entier naturel n.

Considérons maintenant la suite géométrique définie par q^n avec $q > 1$. Puisque $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ avec $a > 0$ ainsi :

$$q^n = (1+a)^n$$

Et d'après l'inégalité précédente :

$$q^n \geqslant 1 + na$$

Or, nous savons que :

$$\lim_{n\to+\infty} (1+na) = +\infty$$

On en déduit, par comparaison (voir le théorème 1), que :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

....

Découvrez les démonstrations détaillées de tous ces théorèmes sur notre site :

`http://question-type-bac.fr/nos-documents/`