ROC

Démonstrations exigibles au bac S 2017

Avant-propos

Sur ce document figurent les dix démonstrations explicitement au programme de la terminale S. Pour la plupart, **ces théorèmes sont difficiles**, voire très difficiles pour un élève de terminale. Il ne s'agit pas d'apprendre ces démonstrations par cœur. D'ailleurs, aucun sujet de baccalauréat ne demandera de les restituer ainsi d'une traite. Mais il peut arriver qu'un exercice demande, à l'aide de plusieurs petites questions guidées, de refaire ces démarches dans le contexte du programme ou en le variant légèrement. Il est donc important, pour le candidat exigeant qui vise l'excellence, d'avoir travaillé ces démonstrations et d'en avoir compris les mécanismes.
Pour l'élève « standard » dont le principal objectif est d'obtenir son bac, nous lui conseillons d'abord de travailler et progresser de la façon la plus efficace qu'il soit à l'aide de « questions-types » disponibles à l'adresse suivante :

`http://question-type-bac.fr/nos-documents/`

Lors du bac S 2014 métropole (dont un corrigé est visible sur notre site [1]), on a vu apparaître une petite ROC [2] facile sur les propriétés des nombres complexes et de leurs conjugués. Cette démonstration n'est pas inscrite officiellement au programme. Dès lors, comment est-il possible qu'une telle démonstration soit exigée ? La réponse est simple : le programme ne peut pas faire une liste complète de toutes les petites propriétés que les candidats doivent savoir démontrer ! Seuls les grands théorèmes difficiles sont signalés. Ainsi, concernant les ROC, deux possibilités peuvent se produire :

- soit une petite propriété facile de cours sera exigée. Comme par exemple démontrer que $\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$ sachant que $\ln(XY) = \ln(X) + \ln(Y)$ [3]. Ces petites démonstrations figurent dans tout cours de terminale S, il suffit de l'apprendre !
- soit un théorème difficile sera abordé, mais alors il le sera de façon guidée et c'est dans ce cas que ce document se révèle utile. En effet, peu de professeurs ont matériellement le temps de pouvoir faire, en classe, toutes ces démonstrations dont certaines sont longues et ardues.

1.1 Suites

Théorème 1 - Théorème de comparaison sur les suites [$\star$]

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que :

- $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;
- u_n tend vers $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$).

Alors v_n tend également vers $+\infty$ (lorsque n tend vers $+\infty$).

http://question-type-bac.fr

Théorème 2 - Limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$ [$\star\star$]

Lorsque $q > 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

http://question-type-bac.fr

1. à cette adresse : `http://question-type-bac.fr/sujets-et-corriges-bac-maths-2014/`
2. restitution organisée de connaissances.
3. ce genre de propriété classique doit pouvoir être démontrée sans hésitation. On évalue par exemple la quantité $\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \ln(B)$ qui, d'après la propriété indiquée du logarithme donne $\ln\left(\frac{A}{B} \times B\right) = \ln(A)$ et on en déduit bien le résultat en soustrayant $\ln(B)$.

1.2 Fonction exponentielle

Théorème 3 - Unicité de la fonction exponentielle [⋆⋆⋆]

La fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f' & = & f \\ f(0) & = & 1 \end{cases}$$

est **unique**.

http://question-type-bac.fr

Théorème 4 - Limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ et en $-\infty$ [⋆⋆]

La fonction exponentielle admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$ et :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

1.3 Géométrie dans l'espace

Théorème 5 - Caractérisation des points d'un plan [⋆⋆]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, tout plan P admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c et d sont des réels avec a, b et c non tous trois nuls.

http://question-type-bac.fr

Théorème 6 - Orthogonalité entre une droite et un plan [⋆⋆]

Une droite D de l'espace est orthogonale à toute droite d'un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

http://question-type-bac.fr

1.4 Probabilités

Théorème 7 - Indépendance et événements contraires [⋆⋆]

Si A et B sont deux événements indépendants, alors il en est de même pour A et $\overline{B}$.

Théorème 8 - Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle [⋆⋆⋆⋆]

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 9 - Loi normale : existence d'un intervalle centré de probabilité donnée [⋆⋆⋆⋆]

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0\,,1)$$

Soit $\alpha \in]0\,,1[$. Alors, il existe un unique réel u_α positif tel que :

$$P\big(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\big) = 1-\alpha$$

Théorème 10 - Détermination d'un intervalle de fluctuation asymptotique [⋆⋆⋆⋆]

On prélève un échantillon de taille n dans une population dans laquelle la proportion d'individus ayant un certain caractère est p. L'intervalle qui contient la fréquence f du caractère dans l'échantillon avec une probabilité $1-\alpha$ (où α est un réel donné appartenant à l'intervalle $]0\,,1[$) est :

$$\left[p-u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,,p+u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

où u_α est le réel tel que $\Phi(\alpha) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

Note : un tel intervalle s'appelle un *un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de* $1-\alpha$.

En particulier, pour un seuil $1-\alpha = 0{,}95$ on a $u_\alpha = u_{0{,}05} \approx 1{,}96$ et l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est alors :

$$\left[p-1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,,p+1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Découvrez les démonstrations détaillées de tous ces théorèmes sur notre site :

`http://question-type-bac.fr/nos-documents/`