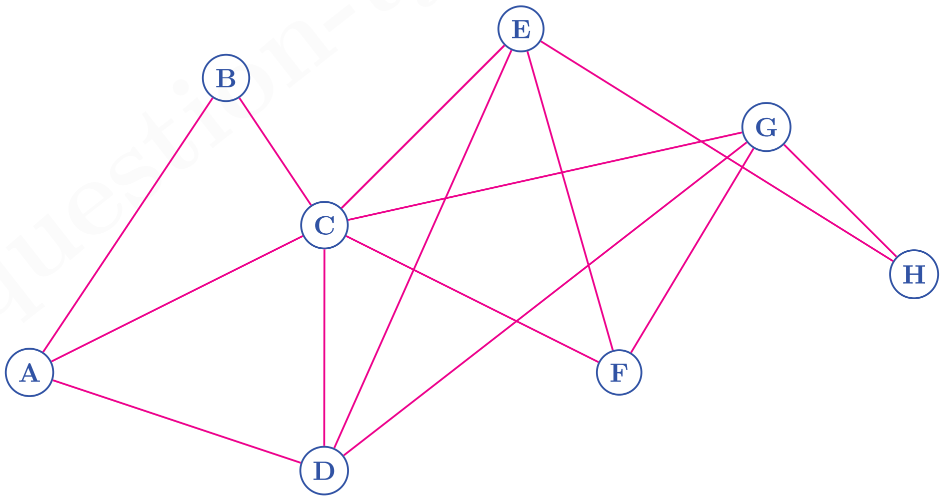
8.2 Chaînes et cycles

Question 29 - Chaînes et cycles eulériens [⋆⋆]

Le graphe ci-dessous représente le réseau d'une compagnie aérienne. Chaque sommet correspond à une ville. Chaque arête correspond à une liaison aérienne en service.

1. Donner le degré de chaque somme du graphe.
2. Vérifier que le graphe est connexe.
3. Un responsable qualité de la compagnie souhaite emprunter une et une seule fois chaque liaison afin de tester, pour chacune d'entre-elles, si elle répond aux normes. Une tel itinéraire est-il possible ? (Justifier). Si oui, proposer un itinéraire possible.
4. En fait, le responsable qualité habite dans la ville A. Il souhaite que son itinéraire parte de A et se termine en A (toujours en empruntant une et une seule fois chaque liaison). Par ailleurs, la compagnie possède le budget pour ouvrir une liaison supplémentaire. Quelle doit-être cette liaison pour satisfaire le souhait du responsable qualité ?



1. On peut présenter les degrés respectifs de chaque sommet à l'aide d'un tableau :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	3	2	6	4	4	3	4	2

2. Pour prouver que le graphe est connexe, il suffit de trouver une chaîne qui passe par tous les sommets. Par exemple :

$$A - B - C - D - E - F - G - H$$

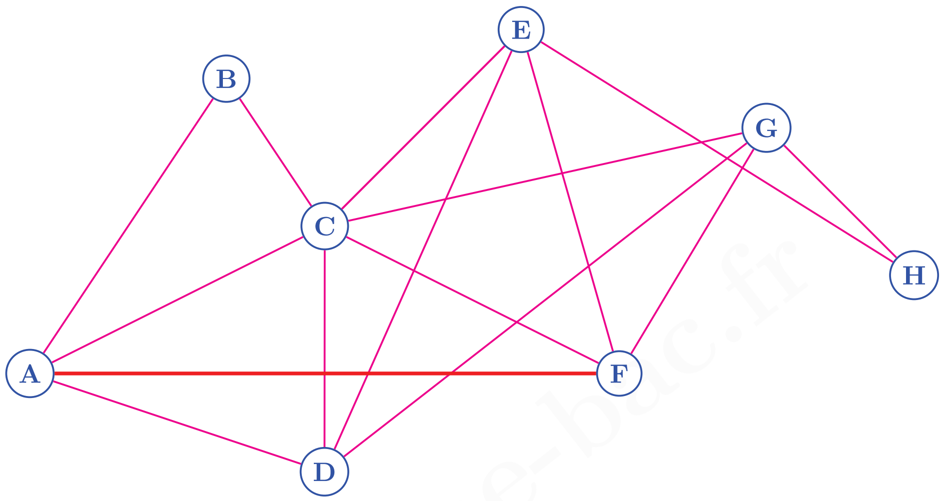
3. Un tel itinéraire est possible lorsque le graphe admet une chaîne eulérienne. Dans notre cas, il n'y a que deux sommets de degré impair (à savoir A et F) donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne et le responsable qualité peut donc réaliser un tel itinéraire. Les extrémités de la chaîne seront nécessairement les sommets de degré impair. Par exemple :

$$A - B - C - A - D - C - E - D - G - F - C - G - H - E - F$$

Notons que la longueur de la chaîne correspond au nombre d'arêtes du graphe.

4. Cette fois-ci, pour qu'un tel itinéraire soit possible, le graphe doit admettre un cycle eulérien. D'après le théorème d'Euler, un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair. Ce n'est pas le cas dans la configuration d'origine. La nouvelle liaison ouverte doit donc être telle qu'il n'y ait plus de sommets

de degré impair. Il faut donc joindre le sommet A au sommet F. De cette manière, le souhait du responsable qualité est réalisable.



Question 30 - Nombre de chaînes de longueur p [★★]

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).

1. Déterminer la matrice d'adjacence A du graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique).

2. On donne, ci-dessous, la matrice A^3 :

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ B \\ C \\ L \\ M \\ P \\ R \\ T \\ V \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} B & C & L & M & P & R & T & V & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 entre les sommets M et R ? Détailler ces chaînes.

3. En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice A^4. Interpréter le nombre obtenu.