

Graphes

À QUOI ÇA SERT ?

Comment fonctionne un GPS pour déterminer le plus court chemin (en temps ou en distance) sur un réseau routier ? Comment calculer le nombre d'itinéraires entre un point A et un point B sur un réseau routier ? Un facteur peut-il faire sa tournée sans emprunter deux fois la même rue ? Toutes ces questions peuvent se résoudre à l'aide de la *théorie des graphes*. Un graphe est un réseau de points (ou sommets) reliés ou non (par des arêtes). Dans ce chapitre, on étudie donc les propriétés des graphes et on met en place quelques outils (notamment des matrices) qui permettent de répondre à ces questions.

Les arêtes d'un graphe peuvent contenir des informations (par exemple des distances ou des temps de trajet). Elles peuvent être orientées ou non selon que l'on peut les emprunter uniquement dans un sens ou dans les deux sens. Il existe également des *graphes probabilistes* sur lesquels les arêtes sont pondérées par des probabilités. De tels graphes permettent, via des matrices de probabilités, de faire des calculs prévisionnels tels que l'évolution d'une maladie par exemple.

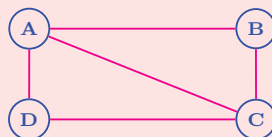
8.1 Généralités

RAPPEL DE COURS

Vocabulaire général sur les graphes

- Un *graphe* est un réseau de sommets dont certains sont reliés par des arêtes.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents*.
- L'*ordre* d'un graphe, c'est le nombre total de sommets.
- Le *degré* d'un sommet, c'est le nombre d'arêtes reliées à ce sommet.
- Un graphe est *complet* lorsque chaque sommet est relié à tous les autres.

Exemple :



L'ordre de ce graphe est 4. Le degré de A est 3, celui de D est 2. Les sommets A et B sont adjacents mais pas les sommets B et D . Le graphe n'est pas complet mais si on rajoute l'arête $B - D$, il le devient.

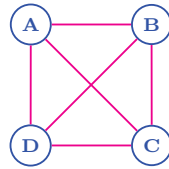
Q 33 - Graphes complets

[★] [87%]

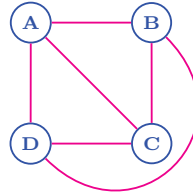
1. Dessiner un graphe complet d'ordre 4. Peut-on le dessiner afin qu'aucune arête ne se croise ?
2. Dessiner un graphe complet d'ordre 5. Combien contient-il d'arêtes ?
3. Déterminer le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre $n \geq 2$.

<http://question-type-bac.fr>

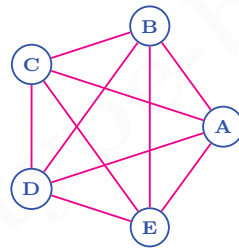
1. Pour réaliser un graphe complet d'ordre 4, il suffit de penser à un « carré » avec ses diagonales :



Il est possible d'éviter que des arêtes se croisent :



2. Voici un graphe complet d'ordre 5 :



Ce graphe contient 10 arêtes. Cette fois-ci, il n'est plus possible d'éviter le croisement d'arêtes.

3. Dans un graphe complet, chaque sommet doit être relié à tous les autres. S'il y a n sommets, alors le degré de chaque sommet est donc $n - 1$. La somme S des degrés de tous les sommets est donc $S = n(n - 1)$. Or, une arête possède deux extrémités. Lorsqu'on ajoute une arête à un graphe, cela augmente la somme des degrés de 2. Le nombre total d'arêtes est donc la moitié de S , à savoir ⁽¹⁾ :

$$\frac{n(n - 1)}{2}$$

En particulier, lorsque $n = 5$, on retrouve bien 10 arêtes.

1. C'est aussi le nombre de façons de choisir 2 objets parmi n , à savoir $\binom{n}{2}$ qui vaut $\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.