8.4 Graphes probabilistes

RAPPEL DE COURS

Graphe probabiliste

- Un *graphe probabiliste* est un graphe orienté dont les arêtes sont pondérées par des probabilités et tel que la somme des probabilités des **arêtes sortantes** est égale à 1.
- La matrice M du graphe contenant ces probabilités est alors appelée *matrice de transition*.

État probabiliste

- Il s'agit d'un vecteur ligne P_n décrivant, en terme de probabilités, l'état du système étudié, après n étapes itératives. L'*état initial* est noté P_0. L'état probabiliste P_n se calcule avec la formule :

$$P_n = P_0 M^n$$

Noter que la somme des composantes d'un vecteur ligne donnant un état probabiliste est égale à 1.

- On appelle *état stable* un état probabiliste P tel que :

$$P = PM$$

En cas d'existence, cet état stable traduit l'état à long terme (ou l'état limite) du système.

Question 31 - Graphe probabiliste - État stable

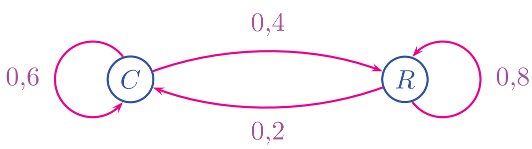
Au début d'une étude démographique portant sur les 1200 personnes d'une île, le quart de la population vivait dans la capitale. Depuis, chaque année, 40% des habitants de la capitale quittent celle-ci pour aller vivre dans le reste de l'île tandis que 20% des habitants du reste de l'île viennent habiter dans la capitale.

1. Décrire cette situation par un graphe probabiliste, donner sa matrice de transition M et l'état initial P_0.

2. Déterminer, après 2 années, l'état probabiliste P_2 et l'interpréter.

3. Prouver qu'il existe un état stable P et l'interpréter.

1. Notons C et R les événements « vivre dans la capitale » et « vivre dans le reste de l'île » respectivement. On obtient le graphe probabiliste suivant :



La matrice de transition M associée à ce graphe est :

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & R \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Et le vecteur ligne P_0 donnant l'état initial est :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

2. On a :

$$P_2 = P_0 M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}^2$$

Calculons M^2 :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}56 \\ 0{,}28 & 0{,}72 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}68 \end{pmatrix}$$

Interprétation : après deux années, 32% de la population vit dans la capitale et 68% dans le reste de l'île.

3. Cherchons s'il existe un état stable $P(x \quad y)$, c'est-à-dire un vecteur ligne tel que $x + y = 1$ et :

$$P = PM$$

$$(x \quad y) = (x \quad y)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$(x \quad y) = (0{,}6x + 0{,}2y \quad 0{,}4x + 0{,}8y)$$

Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} x & = & 0{,}6x + 0{,}2y \\ y & = & 0{,}4x + 0{,}8y \end{cases}$$

Or, $y = 1 - x$. La première ligne du système donne alors :

$$x = 0{,}6x + 0{,}2(1 - x)$$

$$0{,}6x = 0{,}2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Noter que l'on aurait obtenu le même résultat en travaillant avec la deuxième ligne du système.

On en déduit la valeur de y (qui est égale à $1 - x$) :

$$y = \frac{2}{3}$$

Il existe donc un état stable qui est :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

En conclusion, à long terme, un tiers de la population vivra dans la capitale et les deux tiers dans le reste de l'île.

. . . .