Continuité et dérivabilité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection

Question 7 - Solution d'une équation du type $f(x) = k$: existence et unicité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,,2]$.

Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque c'est une fonction polynôme) et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

Le signe de cette dérivée n'est pas constant (par exemple $f'(0) = -2$ et $f'(1) = 1$). Pour le connaître avec précision, on rappelle la règle suivante, valable pour toute **fonction polynôme du second degré** :

> Le signe de $ax^2 + bx + c$ est toujours celui du nombre a sauf entre les éventuelles racines x_1 et x_2.

On peut déterminer les éventuelles racines du trinôme $3x^2 - 2$ en calculant son discriminant Δ ou en factorisant directement [1] :

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Les racines du trinômes sont $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ainsi que $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

On peut maintenant dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1		α		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0				$+$				
Variations de la fonction f		↗		↘		↗	-2	↗	0	↗	3	↗	

Grâce à cette étude, on constate que la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\,,+\infty\right[$ et en particulier sur l'intervalle $[1\,,2]$ qui est inclus dans le précédent.

Par ailleurs, la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (puisque les fonctions polynômes le sont) et donc sur l'intervalle $[1\,,2]$ également. Enfin, on a :

$$f(1) = 1^3 - 2\times 1 - 1 = -2 \text{ et } f(2) = 2^3 - 2\times 2 - 1 = 3$$

En particulier :

$$f(1) < 0 \text{ et } f(2) > 0$$

Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel α dans l'intervalle $[1\,,2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,,2]$.

Enfin, on obtient un encadrement de la solution α à l'aide d'un tableau de valeurs avec la calculatrice.

Ci-dessous un premier balayage avec un pas égal à 10^{-1} :

1. c'est toujours possible pour les trinômes incomplets du type $ax^2 + c$ lorsque a et c sont de signes opposés ou du type $ax^2 + bx$.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	$\cdots$
$f(x)$	-2	$-1{,}869$	$-1{,}672$	$-1{,}403$	$-1{,}056$	$-0{,}625$	$-0{,}104$	$0{,}503$	$1{,}232$	$\cdots$

Ce premier tableau nous permet de localiser α à 10^{-1} près :

$$1{,}6 < \alpha < 1{,}7$$

Puis, on effectue un second tableau de valeurs entre 1,60 et 1,70 avec, cette fois, un pas de 10^{-2} :

x	1,60	1,61	1,62	1,63	$\cdots$
$f(x)$	$-0{,}104$	$-0{,}047$	$0{,}012$	$0{,}071$	$\cdots$

D'où l'encadrement souhaité :

$$1{,}61 < \alpha < 1{,}62$$

. . . .

Question 8 - Étude d'une bénéfice

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,,10]$ par :

$$B(x) = x + 4\mathrm{e}^{-x} - 5$$

où x représente le nombre de pièces produites et vendues exprimé en centaines et $B(x)$ le bénéfice en milliers d'euros.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,,10]$.

2. Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ possède une solution unique α sur $[\ln(4)\,,10]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

1. La fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0\,,10]$ avec :

$$B'(x) = 1 - 4\mathrm{e}^{-x}$$

Étudions le signe de cette dérivée :

$$B'(x) \geqslant 0 \iff 1 - 4\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff 4\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{4}$$

Par croissance de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $[0\,,10]$:

$$B'(x) \geqslant 0 \iff -x \leqslant \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff -x \leqslant -\ln(4) \iff x \geqslant \ln(4)$$

La fonction B est donc croissante sur l'intervalle $[\ln(4)\,,10]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\,,\ln(4)]$:

x	0		$\ln(4)$		10
Signe de $B'(x) = 1 - 4\mathrm{e}^{-x}$		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction B		$\searrow$	$\ln(4) - 4$	$\nearrow$	

La fonction B admet un maximum en $\ln(4)$ égal à :

$$B\big(\ln(4)\big) = \ln(4) + 4\mathrm{e}^{-\ln(4)} - 5 = \ln(4) + 4 \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(4)}} - 5 = \ln(4) + 1 - 5 = \ln(4) - 4$$

2. La fonction B est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln(4)\,,10]$ avec :

$$B\big(\ln(4)\big) = \ln(4) - 4 \approx -2{,}614 < 0 \ \text{ et } \ B(10) = 5 + 4\mathrm{e}^{-10} \approx 5{,}0002 > 0$$

Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[\ln(4)\,, 10]$.

La calculatrice permet de déterminer l'encadrement voulu :

$$4{,}97 < \alpha < 4{,}98$$

En effet, on a :

$$B(4{,}97) \approx -0{,}0022 < 0 \text{ et } B(4{,}98) \approx 0{,}0075 > 0$$

3. L'entreprise est bénéficiaire à partir de 4,98 centaines de pièces produites et vendues, c'est-à-dire 418 unités.

. . . .

3.2 Prouver une inégalité grâce à l'étude des variations d'une fonction

Question 9 - Comparaison entre e^x et $x+1$

Démontrer que pour tout réel x :

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$$

Pour comparer deux quantités, une méthode consiste à étudier le signe de leur différence. D'où l'idée de considérer la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1) = \mathrm{e}^x - x - 1$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

Déterminons les réels x pour lesquels cette dérivée est positive. Pour cela, on résout l'inéquation suivante :

$$f'(x) \geqslant 0$$

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$$

$$\mathrm{e}^x \geqslant 1$$

$$\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$$

Et par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) [2]

$$x \geqslant 0$$

On en déduit que la dérivée f' est positive sur l'intervalle $[0\,, +\infty[$ d'où le tableau de variations suivant :

2. La croissance de la fonction ln se traduit pour A et B strictement positifs par :

$$A \leqslant B \iff \ln(A) \leqslant \ln(B)$$

En particulier, si A et B sont des nombres de la forme $A = \mathrm{e}^a$ et $B = \mathrm{e}^b$, on obtient :

$$\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \iff \ln\left(\mathrm{e}^a\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^b\right)$$

C'est-à-dire :

$$\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \iff a \leqslant b$$

Ce qui traduit la croissance de la fonction exponentielle. En présence de quantités strictement positives, la croissance de la fonction logarithme népérien est donc équivalente à celle de la fonction exponentielle.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

FIGURE 3.1 – Tableau de variations de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x - (x+1)$

On constate que la fonction f admet, sur $\mathbb{R}$, un minimum **égal à** 0 en 0.

En conséquence, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, autrement dit, pour tout réel x :

$$x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$$

. . . .

3.3 Équation de la tangente

Question 10 - Tangente commune à deux courbes en un même point

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x)$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g respectivement.

1. Calculer $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$. En déduire que les courbes C_f et C_g admettent un point commun A.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g admettent la même tangente au point A.

1. On a :

$$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2}{2\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, les courbes C_f et C_g admettent un point commun A de coordonnées $\left(\sqrt{\mathrm{e}}\,, \frac{1}{2}\right)$.

2. Une équation de la tangente T_f à la courbe C_f au point A d'abscisse x_0 est donnée par la formule :

$$T_f : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ici, nous avons $x_0 = \sqrt{\mathrm{e}}$ et $f'(x) = \frac{2x}{2\mathrm{e}} = \frac{x}{\mathrm{e}}$ ce qui donne :

$$T_f : y = f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) + f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

$$T_f : y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \times \left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

$$T_f : y = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}x - \frac{1}{2}$$

On détermine, de même, une équation de la tangente T_g à la courbe C_g au point A d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ via la formule :

$$T_g : y = g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) + g'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

$$T_g : y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \times \left(x - \sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

$$T_g : y = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}x - \frac{1}{2}$$

On constate que les courbes C_f et C_g admettent la même tangente au point A.

. . . .

3.4 Lectures graphiques

Question 11 – Lecture graphique de nombres dérivés

Soient f et g les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous.

La droite T est tangente aux courbes C_f et C_g.

1. Déterminer les abscisses des points d'intersection (visibles sur le graphique) entre C_f et C_g.

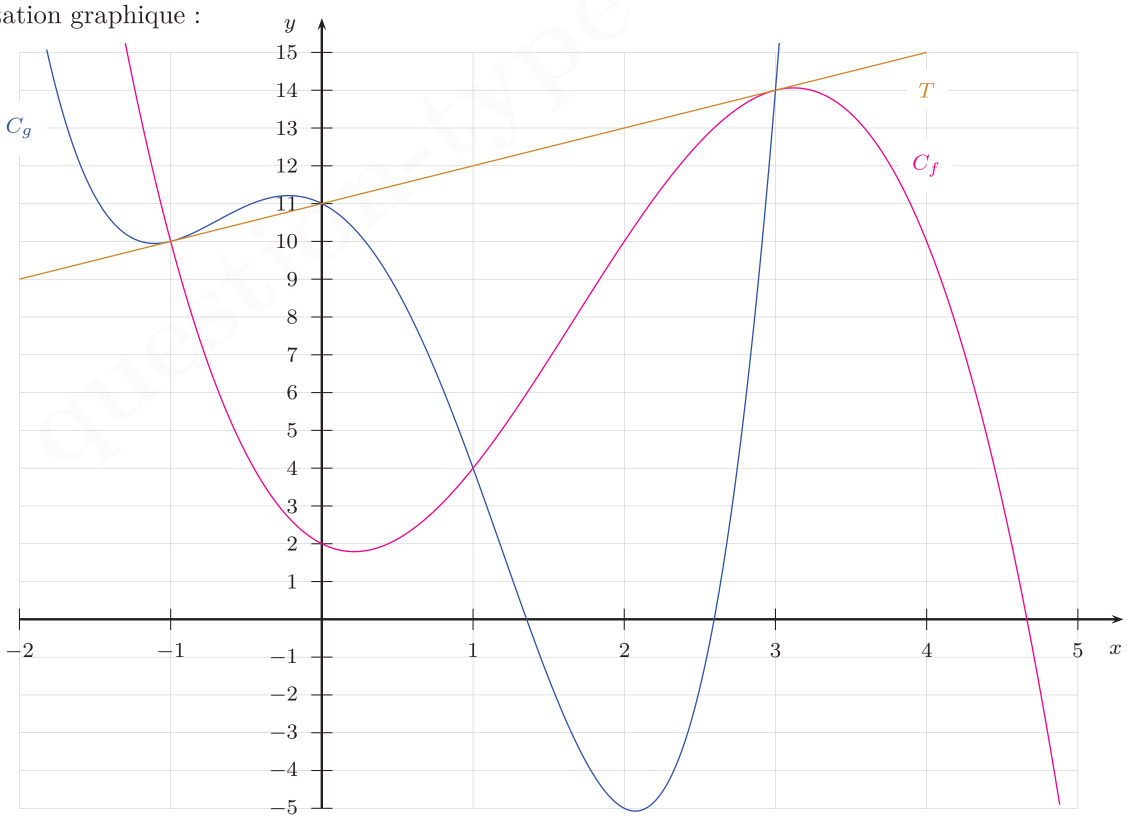
2. Lire graphiquement $f'(-1)$ et $g'(3)$.

3. On donne :

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

Retrouver les résultats des deux questions précédentes par calcul.

Représentation graphique :



1. À l'aide des informations visibles sur le graphique, les courbes C_f et C_g se coupent en (au moins) trois points d'abscisses respectives -1, 1 et 3.

2. Le nombre dérivé $f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T. Par lecture graphique, on a :

$$f'(-1) = \frac{\text{décalage vertical}}{\text{décalage horizontal}} = \frac{4}{4} = 1$$

Le nombre $g'(3)$ correspond aussi au coefficient directeur de la tangente T qui est commune aux deux courbes, donc :

$$g'(3) = f'(-1) = 1$$

3. On retrouve les abscisses des points d'intersection entre C_f et C_g en résolvant l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x + 11 = -x^3 + 5x^2 - 2x + 2$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Il s'agit d'une équation « bicarrée ». On la résout en posant $X = x^2$ ainsi on a :

$$X^2 - 10X + 9 = 0$$

On obtient une équation du second degré que l'on peut résoudre en calculant le discriminant Δ du trinôme $X^2 - 10X + 9$ ou, plus rapidement dans ce cas de figure, en canonisant puis en factorisant :

$$(X-5)^2 - 25 + 9 = 0$$

$$(X-5)^2 - 16 = 0$$

$$(X-5-4)(X-5+4) = 0$$

$$(X-9)(X-1) = 0$$

D'où $X = 9$ ou $X = 1$ mais comme on avait posé $X = x^2$, il nous reste donc à résoudre :

$$x^2 = 9 \text{ ou } x^2 = 1$$

Et finalement, nous avons 4 solutions :

$$S = \{-3\,,\,-1\,,1\,,3\}$$

On retrouve les trois abscisses précédentes, la quatrième ($x = -3$) tombe hors du graphique.
Enfin, en dérivant les deux fonctions, on obtient :

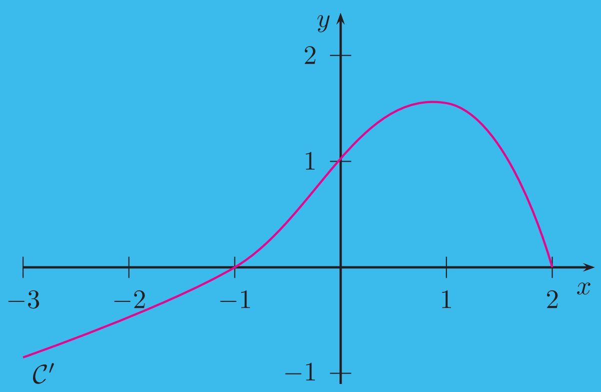
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 10x - 2 \quad \text{et} \quad g'(x) = -3x^2 + 10x - 2$$

On peut alors vérifier que $f'(-1) = -4 - 3 + 10 - 2 = 1$ et $g'(3) = -27 + 30 - 2 = 1$.

....

Question 12 - VRAI ou FAUX à partir de la courbe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-3\,,2]$ telle que $f(0) = -1$.
On donne, ci-dessous, la représentation graphique $\mathcal{C}'$ de la fonction dérivée f' de f :



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,,-1]$, $f'(x) \leqslant 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,,2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,,2]$, $f(x) \geqslant -1$.

4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,,0)$.