BAC ES - THÈME 2

Taux d'évolutions et pourcentages

À QUOI ÇA SERT ?

Les pourcentages font partie de notre quotidien. Ils sont utilisés partout. On comprend généralement assez facilement ce qu'ils signifient dans un contexte donné mais dès qu'il faut faire des calculs, on est vite perdu... Pourquoi sommes-nous destabilisés face aux calculs avec des pourcentages ? La raison est que, en réalité, cette notion de pourcentage présente une difficulté cachée : on l'utilise dans deux catégories de situations sensiblement différentes : pour évoquer une *proportion* et pour évoquer une *évolution*.
Par exemple, si on affirme que : « 35% des individus ont déjà pris un traitement à base d'antidépresseurs », on évoque une proportion. Mais si on affirme que : « La vente d'antidépresseurs a augmenté de 35% entre l'année 2010 et l'année 2019 », cette fois on évoque une évolution. Dans ce chapitre, on étudie donc ces deux situations et quelles sont les formules qui permettent de faire les calculs.

RAPPEL DE COURS

Pourcentages - Proportions

Une proportion t exprimée en pourcentage correspond à la fraction $\frac{t}{100}$ (ou un *taux*). Par exemple 15% est égal à $\frac{15}{100}$ ou encore 0,15. On peut donc tout à fait écrire des égalités comme $80\% = 0{,}80$.

- Pour calculer quelle quantité représente un certain pourcentage donné t d'une valeur de référence V_{ref}, on effectue donc le calcul suivant :
$$t \times V_{ref}$$
Exemple : un pot de sauce tomate de 300 g contient 15% de sucre. Quelle quantité de sucre (en g) représente ce pourcentage ? Réponse :
$$0{,}15 \times 300 = 45\,\text{g}$$
- Pour savoir quel pourcentage représente une valeur étudiée $V_{étudiée}$ d'une valeur de référence V_{ref}, on effectue le calcul suivant :
$$\frac{V_{étudiée}}{V_{ref}}$$
Les valeurs en question sont généralement des effectifs ou des quantités.
Exemple : une recette de gâteau demande 250 g de farine, 100 g de beurre, 2 oeufs (100 g) et 150 g de sucre. Quel pourcentage de sucre contiendra ce gâteau ? Ici, la valeur de référence est le poids total du gâteau (600 g). Le pourcentage de sucre est :
$$\frac{150}{600} = 0{,}25 \quad \text{c-à-d} \quad 25\%$$

En fait, toutes les formules précédentes découlent du tableau de proportionnalité suivant :

Pourcentage	Valeur
t	Valeur étudiée
1	Valeur de référence

À l'aide des produits en croix, on résout toutes les situations en rapport avec les questions de proportions.

RAPPEL DE COURS

Pourcentages - Évolutions

Lorsque des grandeurs évoluent (à la hausse ou à la baisse), on peut toujours considérer qu'elles sont *multipliées* par un certain coefficient. Un tel coefficient s'appelle le *coefficient multiplicateur* associé à l'évolution. Par exemple, si une grandeur passe de 40 à 50, elle est multipliée par 1,25. On dira alors qu'elle a augmenté de 25%.

- Pour calculer un *pourcentage d'évolution* (ou *taux d'évolution*) d'une quantité passant d'une valeur initiale (V_i) à une valeur finale (V_f), on effectue le calcul suivant :

$$\frac{V_f - V_i}{V_i}$$

Exemple : un prix évolue de 16 euros à 18 euros. De quel pourcentage a-t-il augmenté ?

$$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{18-16}{16} = 0{,}125 \quad \text{c-à-d} \quad 12{,}5\%$$

Remarque : on peut également également se contenter de calculer juste $\frac{V_f}{V_i}$ pour obtenir le coefficient multiplicateur associé (1,125 dans notre exemple).

- Si une quantité X augmente successivement de plusieurs pourcentages, on multiplie autant de fois par les coefficients multiplicateurs correspondants. En particulier, si on applique n fois le même coefficient multiplicateur $c = (1 \pm t)$, cette quantité X devient :

$$c^n \times X$$

Ce nombre c^n s'appelle *coefficient multiplicateur global*. On peut retrouver le *taux d'évolution global* :

$$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{c^n \times X - X}{X} = c^n - 1$$

- Si une quantité X est multipliée par un coefficient c_d (coefficient multiplicateur direct), le *coefficient multiplicateur réciproque* c_r permettant de revenir à cette quantité X est tel que :

$$c_d \times c_r = 1$$

Par exemple une augmentation de 25% (qui se traduit par un coefficient multiplicateur direct $c_d = 1{,}25$) sera compensée par diminution de 20% (car le nombre c_r tel que $c_r \times c_d = 1$ est $c_r = \frac{1}{c_d} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}80$ ce qui correspond bien à une baisse de 20%).

Q 8 - Pourcentages - Taux d'évolutions

[★★] [75%]

Dans un pays, la compagnie d'électricité décide d'augmenter ses tarifs de 6% par an à partir du 1er janvier 2015 et ceci durant 5 années consécutives.

1. Un ménage a dépensé 650 euros d'électricité pour l'année 2014. En supposant sa consommation identique chaque année, quel sera le montant de sa facture d'électricité pour l'année 2015 ? Et en 2019 ?

2. Calculer le pourcentage global d'évolution sur l'ensemble des 5 années, de 2015 à 2019.

3. En l'année 2020, la compagnie décide de ramener le tarifs au niveau de l'année 2014 (donc annuler les cinq hausses consécutifs de 6%). De quel pourcentage faudra-t-il alors baisser les tarifs ?

1. En 2015, ce menage aura une facture de 689 euros car :

$$650 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 650 \times 1{,}06 = 689$$

Pour l'année 2019, on cumule 5 hausses consécutives de 6% :

$$650 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 650 \times 1{,}06^5 \approx 869{,}85$$

En 2019, ce menage aura une facture de 870 euros environ.

2. Puisque $1{,}06^5 \approx 1{,}338$, on peut affirmer que le pourcentage global d'évolution sur l'ensemble des 5 années, de 2015 à 2019 sera de 33,8% (et non 30% !). On peut aussi utiliser les calculs précédents et la formule suivante :

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \approx \frac{869{,}85 - 650}{650} \approx 0{,}338 \approx \frac{33{,}8}{100}$$

3. Il s'agit de calculer le taux d'évolution réciproque. Le coefficient multiplicateur direct est $c_d = 1{,}06^5$. Nous savons que le coefficient multiplicateur réciproque c_r vérifie la relation :

$$c_r \times c_d = 1$$

$$c_r = \frac{1}{c_d} = \frac{1}{1{,}06^5} \approx 0{,}747$$

Or $0{,}747 = 1 - 0{,}253 = 1 - \frac{25{,}3}{100}$. En 2020, il faudra donc baisser les tarifs de 25,3% pour revenir au niveau des tarifs de 2014.

. . . .

Q 9 - VRAI ou FAUX sur les pourcentages

[★★] [42%]

Une voiture coûte 15000 euros toutes taxes comprises (on suppose que le taux de T.V.A. est de 20%).
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le prix hors taxe de ce véhicule est de 12000 euros.

2. Le commerçant concède deux remises successives de 6% puis de 4% sur ce véhicule.
Le prix de cette voiture après ces deux remises est de 13500 euros.

3. L'année suivante, ce même véhicule passe de 15000 euros à 15750 euros. L'augmentation est de 5%.

4. Si le commerçant concède une remise de 5% sur le prix de 15750 euros, alors le prix de ce véhicule reviendra à 15000 euros.

1. C'est FAUX. En effet, le prix toutes taxes comprises (P_{TTC}) s'obtient par **augmentation** de 20% du prix hors taxe (P_{HT}) :

$$P_{TTC} = \left(1 + \frac{20}{100}\right) P_{HT}$$

$$15000 = 1{,}20 P_{HT}$$

Et finalement :

$$P_{HT} = \frac{15000}{1{,}20} = 12500$$

Le prix hors taxe est donc de 12500 euros.

2. C'est FAUX. Le prix de la voiture après les deux remises est :

$$\left(1 - \frac{6}{100}\right)\left(1 - \frac{4}{100}\right) \times 15000 = 13536$$

Notons que le coefficient multiplicateur global après les deux remises est de :

$$c = \left(1 - \frac{6}{100}\right)\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}94 \times 0{,}96 = 0{,}9024 = 1 - 0{,}0976 = 1 - \frac{9{,}76}{100}$$

Le cumul des deux remises correspond donc globalement à une remise de 9,76% et non 10%.