THÈME 2

Taux d'évolutions et pourcentages

RAPPEL DE COURS

Pourcentages

La notation $t\%$ est utilisée pour représenter la fraction $\frac{t}{100}$ (ou un *taux*). Par exemple 15% est égal à $\frac{15}{100}$ ou encore 0,15. On peut donc tout à fait écrire des égalités comme $80\% = 0{,}80$.

- Pour calculer un certain pourcentage $t\%$ d'une quantité X, on effectue donc le calcul suivant :
$$\frac{t}{100} \times X$$
- Pour calculer ce que devient une quantité X après augmentation (ou baisse) d'un certain pourcentage $t\%$, on effectue le calcul suivant :
$$\left(1+\frac{t}{100}\right)X \quad \text{(augmentation)} \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{t}{100}\right)X \quad \text{(baisse)}$$
Le nombre $c = \left(1 \pm \frac{t}{100}\right)$ est appelé un *coefficient multiplicateur*. Connaissant un coefficient multiplicateur c, on peut retrouver le pourcentage correspondant via la relation $\frac{t}{100} = c - 1$. Par exemple, le coefficient $c = 1{,}15$ correspond à une augmentation de 15%.
- Pour calculer un *pourcentage d'évolution* (ou *taux d'évolution*) d'une quantité passant d'une valeur initiale (V_i) à une valeur finale (V_f), on effectue le calcul suivant :
$$\frac{V_f - V_i}{V_i}$$
- Si une quantité X augmente successivement de plusieurs pourcentages, on multiplie autant de fois par les coefficients multiplicateurs correspondants. En particulier, si on applique n fois le même coefficient multiplicateur $c = \left(1 \pm \frac{t}{100}\right)$, cette quantité X devient :
$$c^n \times X$$
Ce nombre c^n s'appelle *coefficient multiplicateur global*. On peut retrouver le *taux d'évolution global* :
$$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{c^n \times X - X}{X} = c^n - 1$$
- Si une quantité X est multipliée par un coefficient c_d (coefficient multiplicateur direct), le *coefficient multiplicateur réciproque* c_r permettant de revenir à cette quantité X est tel que :
$$c_d \times c_r = 1$$
Par exemple une augmentation de 25% (qui se traduit par un coefficient multiplicateur direct $c_d = 1{,}25$) sera compensée par diminution de 20% (car le nombre c_r tel que $c_r \times c_d = 1$ est $c_r = \frac{1}{c_d} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}80$ ce qui correspond bien à une baisse de 20%).

Question 5 - Pourcentages - Taux d'évolutions

Dans un pays, la compagnie d'électricité décide d'augmenter ses tarifs de 6% par an à partir du 1er janvier 2015 et ceci durant 5 années consécutives.

1. Un ménage a dépensé 650 euros d'électricité pour l'année 2014. En supposant sa consommation identique chaque année, quelle sera le montant de sa facture d'électricité pour l'année 2015 ? Et en 2019 ?
2. Calculer le pourcentage global d'évolution sur l'ensemble des 5 années, de 2015 à 2019.
3. En l'année 2020, la compagnie décide de ramener le tarifs au niveau de l'année 2014 (donc annuler les cinq hausses consécutifs de 6%). De quel pourcentage faudra-t-il alors baisser les tarifs ?

http://question-type-bac.fr

1. En 2015, ce menage aura une facture de 689 euros car :
$$650 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 650 \times 1{,}06 = 689$$
Pour l'année 2019, on cumule 5 hausses consécutives de 6% :
$$650 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 650 \times 1{,}06^5 \approx 869{,}85$$
En 2019, ce menage aura une facture de 870 euros environ.
2. Puisque $1{,}06^5 \approx 1{,}338$, on peut affirmer que le pourcentage global d'évolution sur l'ensemble des 5 années, de 2015 à 2019 sera de 33,8% (et non 30% !). On peut aussi utiliser les calculs précédents et la formule suivante :
$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \approx \frac{869{,}85 - 650}{650} \approx 0{,}338 \approx \frac{33{,}8}{100}$$
3. Il s'agit de calculer le taux d'évolution réciproque. Le coefficient multiplicateur direct est $c_d = 1{,}06^5$. Nous savons que le coefficient multiplicateur réciproque c_r vérifie la relation :
$$c_r \times c_d = 1$$
$$c_r = \frac{1}{c_d} = \frac{1}{1{,}06^5} \approx 0{,}747$$
Or $0{,}747 = 1 - 0{,}253 = 1 - \frac{25{,}3}{100}$. En 2020, il faudra donc baisser les tarifs de 25,3% pour revenir au niveau des tarifs de 2014.

....

Question 6 - VRAI ou FAUX sur les pourcentages

Une voiture coûte 15000 euros toutes taxes comprises (on suppose que le taux de T.V.A. est de 20%).
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le prix hors taxe de ce véhicule est de 12000 euros.
2. Le commerçant concède deux remises successives de 6% puis de 4% sur ce véhicule.
Le prix de cette voiture après ces deux remises est de 13500 euros.
3. L'année suivante, ce même véhicule passe de 15000 euros à 15750 euros. L'augmentation est de 5%.
4. Si le commerçant concède une remise de 5% sur le prix de 15750 euros, alors le prix de ce véhicule reviendra à 15000 euros.

http://question-type-bac.fr

1. C'est FAUX. En effet, le prix toutes taxes comprises (P_{TTC}) s'obtient par **augmentation** de 20% du prix hors taxe (P_{HT}) :
$$P_{TTC} = \left(1 + \frac{20}{100}\right) P_{HT}$$

$$15000 = 1{,}20 P_{HT}$$

Et finalement :

$$P_{HT} = \frac{15000}{1{,}20} = 12500$$

Le prix hors taxe est donc de 12500 euros.

2. C'est FAUX. Le prix de la voiture après les deux remises est :

$$\left(1 - \frac{6}{100}\right)\left(1 - \frac{4}{100}\right) \times 15000 = 13536$$

Notons que le coefficient multiplicateur global après les deux remises est de :

$$c = \left(1 - \frac{6}{100}\right)\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}94 \times 0{,}96 = 0{,}9024 = 1 - 0{,}0976 = 1 - \frac{9{,}76}{100}$$

Le cumul des deux remises correspond donc globalement à une remise de 9,76% et non 10%.

3. C'est VRAI. En effet :

$$\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times 15000 = 15750$$

4. C'est FAUX. Une baisse de 5% n'annulera pas exactement la hausse de 5%. En effet :

$$\left(1 - \frac{5}{100}\right) \times 15750 = 0{,}95 \times 15750 = 14962{,}5$$

. . . .

questions-type-bac.fr

THÈME 3

Continuité et dérivabilité

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection

RAPPEL DE COURS

Théorème des valeurs intermédiaires - Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels quelconques de I avec $a < b$. Alors pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet (au moins) une solution α comprise entre a et b. Si, de plus, la fonction f est strictement monotone sur I, alors cette solution α est unique.

Question 7 - Solution d'une équation du type $f(x) = k$: existence et unicité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,,2]$.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

http://question-type-bac.fr

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque c'est une fonction polynôme) et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

Le signe de cette dérivée n'est pas constant (par exemple $f'(0) = -2$ et $f'(1) = 1$). Pour le connaître avec précision, on rappelle la règle suivante, valable pour toute **fonction polynôme du second degré** :

Le signe de $ax^2 + bx + c$ est toujours celui du nombre a sauf entre les éventuelles racines x_1 et x_2.

On peut déterminer les éventuelles racines du trinôme $3x^2 - 2$ en calculant son discriminant Δ ou en factorisant directement [1] :

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

Les racines du trinômes sont $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ainsi que $-\sqrt{\frac{2}{3}}$.
On peut maintenant dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1	α	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
Variations de la fonction f		$\nearrow$		$\searrow$		-2	0	3	$\nearrow$

Grâce à cette étude, on constate que la fonction f est **strictement croissante** sur l'intervalle $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\,, +\infty\right[$ et en particulier sur l'intervalle $[1\,,2]$ qui est inclus dans le précédent.
Par ailleurs, la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$ (puisque les fonctions polynômes le sont) et donc sur l'intervalle $[1\,,2]$ également. Enfin, on a :

$$f(1) = 1^3 - 2 \times 1 - 1 = -2 \;\text{ et }\; f(2) = 2^3 - 2 \times 2 - 1 = 3$$

1. c'est toujours possible pour les trinômes incomplets du type $ax^2 + c$ lorsque a et c sont de signes opposés ou du type $ax^2 + bx$.